

人口問題研究所
研究資料第224号
昭和56年6月1日

Institute of Population Problems
Research Series, No.224
June 1, 1981

コステイツイン著
V.A. KOSTITZIN
生物数理論
BIOLOGIE MATHEMATIQUE

篠崎信男 譯
Nobuo SHINOZAKI transl.

厚生省人口問題研究所
INSTITUTE OF POPULATION PROBLEMS
MINISTRY OF HEALTH AND WELFARE
Tokyo, Japan

本資料作成に際して

私はかねてから人口生物学に資することが出来る数理的研究を宿念していたが、現在生物学に対しては物理学的研究及び化学的研究等は既に多くの研究業績があるのに、この分野での数理的研究は遙に遅れている事を知って誠に残念だと日頃思っていたのである。勿論生物統計学というものは現在かなり研究されてはいるが、統計は飽まで統計で、数学的方法は用いても決して数理論それ独自の研究発展にはそれ程寄与する性格のものではない。生物数理論として私が考えているのは生物の有機組織を目で見るようにして行う研究や、また実験研究の出来る事柄ではなく人口事象が何故そのようなになったかその由縁の経過を何んとかして究明したいと言うことである。そこでこの手がかりはないものかと探究していた。この時たまたま本書が目止まった。本書はアルマン・コーランの出版書で生物学を基礎におきながらその発生理論をふまえてその数理論を展開しているので参考になると思った。ということも人口は実験が出来ない。したがって斯る数理論の展開による研究が必要である。

これはまた新しい人口人類学理論を建設しようという私の野心でもあった。当時私が見るところでは、数学は専ら抽象的理念の詮索によって、その実績を発揮しているのであるが、さて具体的に適用するとかかなり飛躍してしまい肌細かい五感的存在である生物学的現象それ自身には連関しない。これは現在でも経済学的人口論にもあてはまる原則で、何時の間にか統計数字に情し本来の人口自体がどこかに捨て去られてしまう危険性がある。つまり人口問題から発したものがこうした手続きをしている中に経済問題になったり社会問題になったりして人口問題としての本質が見失われてくるという事である。そこでこの問題を追求しようとした生物数理論を通してどこまでその意図なるものが接近出来るか、或は出来ないなら別途に生物数理学なる特殊理論が存在するものなのか、ここに試行的に研究をして見ようということである。また本書は故横田年研究官も推奨しているもので、私が研究している中に更に本書を訳して研究所の資料にするか出版するかを勧められこれを訳した。原書はV. A. Kostitzinの仏語で書かれた“Biologie Mathématique”である。本書はアルマン・コーラン叢書の1つで、1937年刊行せられたものであるが、更に1939年Theodore H. Savoryによって英訳せられ、“Mathematical Biology”として公刊せられている。私は原著を主としたが仏語は得意でないので英訳を中心として参考に供したのである。昭和19年3月1日に訳し終ったが内容は、著者序文にもある如く、未だ完成の域に達したとは言い難いものである。然しこの研究は多大に示唆に富んだものであると信じている。私は若干原著にない数学公式の関係、証明等之を訳註として補足したのであるが、原著、特に英訳には誤植等があり、之を訂正しつつ数学式を出来る限り正確にしてその生物学的意義を知ろうと努力したのであるが、中には、どんな理由で、どんな算法によって導入せられたのか不明な数式も若干見出された。しかし大体はその補説をすることが出来たようにも思う。だがこれは読者をして、やや高等数学の常識を必要ならしめるかも知れないが、生物学に於いて、現在専ら統計を主とし、単なる集計的算法に終始している現状から見れば、此処に本書を得た事は、人口問題研究理論にとって1つの展望でもある。大方諸賢の賢明な洞察に期待したい。私はまたこうした分野を開拓しようとする意図の下に、“ロジスティック法則”というものを敢て、“数理論法則”と名付けたのも新分野開発のための前向きな志向があったからである。本書は以前には昭森社より刊行する予定であったが、出版界の統合によって、自然科学専門となった北隆館から出す事になっていた。

ところが敗戦ということで、本書は今まで陽の目を見ず、私は本訳書を抱えながら戦争中逃げ廻ったという因縁付きのものである。

戦後資料にするということで話に出たが故館所長が是非早く見せてくれと言われ、彼に渡したが、なかなか読み切れずその中急死してしまった。所長室からこの訳書が出てきたがただこの中で故館氏が重要で自分の研究や講演に必要と思ってか序文の第1章から第4章まで破って欠落していた。したがって残念ながらこれがない。原著も貸していたがそれが出てこないのを省くことにした。しかし全体としてはそれ程主旨には影響がないと思われる。今は古典ばかりであるがこれも貴重な資料となるであろう。

昭和56年3月

篠崎信男 訳

目 次

第一章	史的観察	1
第二章	若干の数学的概念	2
1.	頻数曲線	2
2.	頻数曲線の展開	4
3.	相関及び因果関係	6
4.	相関なき二連続数列	13
5.	一次微分方程式系	15
6.	生物学的微分方程式	17
第三章	生活と環境	20
1.	有機物質の循環	20
2.	炭素と酸素の循環	21
3.	窒素の循環	25
第四章	人口増加：ロジスティック法則	28
1.	封鎖人口に対する微分方程式	28
2.	ロジスティック法則	29
3.	ロジスティック法則の実験的証明	33
第五章	集団と環境	36
1.	単一ならざる集団	36
2.	一同種集団に於ける周期的変動	37
3.	代謝産物により損害を受ける単一集団及び残存作用	39
第六章	集団と環境（続）	45
1.	他種属を捕食する一集団	45
2.	食料豊富な一集団	46
3.	更新されざる一定食料の集団	46
4.	集団密度と供給食料密度との関係	47
5.	集団と面積：第一の場合	48
6.	集団と面積：第二の場合	52
第七章	集団増加に関する数学的高次処理法	54
1.	異った年齢群より成る集団	54
2.	季節的増殖を行う動物	56
3.	ロジスティック法則の一般化	57
4.	集団人口の老衰	58
5.	集団増加の動態公理	59
第八章	種属間関係	62
1.	一般的考察	62
2.	ナガニシ、貽貝、ツメ貝	63
3.	残存作用	65

第九章	種属間関係(続)	71
1.	同一食料を得んとする二種属の闘争	71
2.	二種属が他の一種属を捕食する場合の三種属	73
3.	一種属が他種属を捕食する場合の二種属, Volterraの生物学的法則	74
4.	狼—山羊—野菜	80
第十章	共棲生活と寄生生活	82
1.	共棲生活	82
2.	単純な寄生生活	85
3.	寄生生活の増加	89
第十一章	有機体の成長	97
1.	一般的考察	97
2.	有機体による食料の活用	99
3.	組織の成長	102
第十二章	胚芽又は胎児の成長初期	103
1.	自由なる胚子	103
2.	母体内に於ける胎児	104
第十三章	胚芽又は胎児の成長後期	109
1.	人間の成長	109
2.	哺乳動物	112
3.	魚類	114
4.	成長と脱皮	115
5.	個体の器官及び各部の成長	115
第十四章	生活体の形態	118
1.	相称性及び極性	118
2.	環境, 運動及び形態	120
第十五章	進化	122
1.	生命とエントロピー(熱力学的機能)	122
2.	生存競争と淘汰	122
3.	間接淘汰	126
附	録	

第一章 史的 観 察

本章を概観するに当って、若干、歴史的考察を付け加えておこう。自然科学は長い間、統計方法を使用して来たのであるが、方法が次第に改善され“生物測定学”という新しい科学の建設されたのは、イギリスの人類学者であり、数学者であった Karl Pearson に負うところのものである。また、封鎖人口を論ずるに当っては 1845 年 Verhulst によって初めて与えられたものである。Verhulst の業績以来、特殊な生物学的の諸問題は、屢々、解析的方法によって探究せられて来たのであるが、さらに一般的な問題に対してこの方法を体系的に適用したという榮譽は Lotka と、これとは独立に研究した Volterra に帰せらるべきである。特に物理的生物学に於ける Lotka の業績は、アングロ・サクソン諸国における生物数理学的研究の運動を開始せしめたのである。又数学的示唆に富むことの多い Volterra の赫々たる業績も、ヨーロッパ大陸に於いて同様の運動を出発せしめている。

人口増加法則に関する、半ば理論的な、半ば実験的な生物集団的な方則に関する Pearl の研究は、近代人口 (demographie) の基礎を与えたものである。更に J. B. S Haldane の自然淘汰の数理論についての重大なる貢献を挙げなければならないのである。

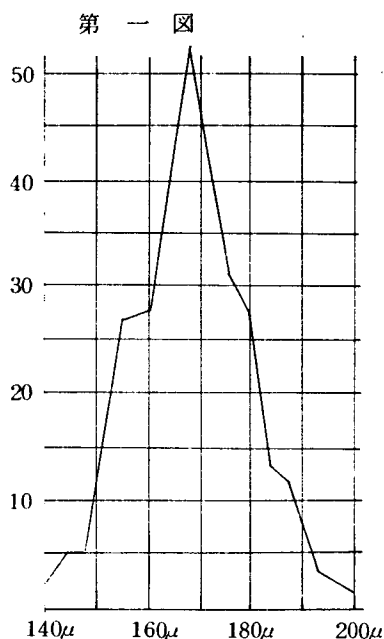
注) 本文の若干のものが紛失してしまっているが以上のことで大畧つきているので御承願
いたい。

第二章 若干の数学的概念

本章に於いては、後に役立ついくつかの数学的概念を簡単に考察して見よう。

1. 頻数曲線

先づ一動物群に於ける型量の様な、何等かの生物学的性格に関係した統計的資料を研究する事を考慮しなければならない。即ち、最小最大間を、ある数に等分して、その区域にある型量の頻数を算する。斯くして得られた形は頻数多角形であって、横坐標はその型量を示し、縦標は該型量に属する個体数を示すものである。



ぞうり虫の大きさ
(Jennings による)

第一図に示してある特徴のある形は、一般に知られた滴虫類、ぞうり虫 (Paiametium) の頻数多角形である。本頻数多角形に依れば最小最大型量の個体数は少く、平均型量の大きさのものが一般である。又頻数多角形は中央値に関して、事実、対象型を示している。このような分布は多くの曲線によって示されているけれども、多くの理由より Gauss の曲線を選ぶ事が最も適当なものである。今、 l を大きさ、 l_m を平均の大きさ、 N を全個体数、 Δn を (l , $l + \Delta l$) 間の個体数とすれば次式を得る。

$$\Delta n = \frac{N\sqrt{\pi}}{h} e^{-h^2(l-l_m)^2} \Delta l \dots\dots\dots (1)$$

斯る種類の頻数曲線は三つの媒介数によって完全に決定せられるのである。即ち第一変動 l_m は頂点の位置を与え、第二変数 N は全個体数を示し、第三変数 h は平均値周辺の分布を示している。(1)式は又平均に関する確率誤差の分布法則でもある。故に型量分布がこのような法則を立証するものであるとすればこの生物学的性質は単に蓋然率に従うものであると人々は認めるに到るであろう。即ち平均値 l_m に関して、大いさの分布は何等特殊なる法則によっては支配せられてなく、統計的資料は同種のものであると言う事が出来るのである。然しぞうり虫の特殊なる場合に於いて

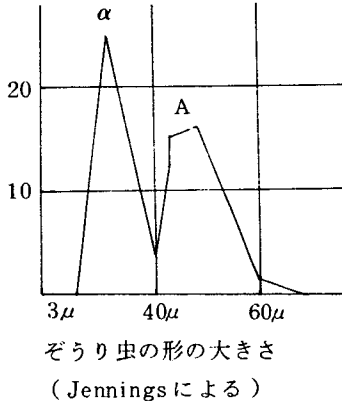
は、本結論は正当でない。即ち資料の異質のものでは、Jenningsの統計によっては、異った世代の個体間に於ける差を区別する事は出来ないのである。しかも世代は(1)曲線の媒介変数に確実に影響を与える要因である。(1)曲線は多少の差こそあれ第一図の頻数多角形に類似しているが、事実完全であるとは言い難いのである。よって次の如き型の曲線こそ望ましいものであらうとの印象を得るのである。

$$\Delta n = A_1 e^{-h_1^2(l-l_1)^2} \Delta l + A_2 e^{-h_2^2(l-l_2)^2} \Delta l + A_3 e^{-h_3^2(l-l_3)^2} \Delta l$$

このため常に必要な事は、資料を統一する事、即ち同世代、同種属等々の個体間の諸性質の分布を研

究する事である。多くの場合、資料の異質のものは頻数多角形それ自体に、いくつかの頂点を有する形となって示されているものである。このような例はぞうり虫の二形態より成る混合集団に関して見出されるものである。(第二図)

第二図



即ち α 頂点は *Paramecium aurelia* を示し A は *Paramecium Caudatum* を示す。この時、分布は次の曲線によって示す事が出来るものである。

$$\Delta n = A_1 e^{-h_1^2(l-l_1)^2} \Delta l + A_2 e^{-h_2^2(l-l_2)^2} \Delta l \dots\dots\dots (2)$$

頻数曲線は二つ又は三つの頂点を有するのが屢々あるが、その複雑性に関して、理由を確定する事は必ずしも容易なるものではないのである。季節に従って食餌する鳥群の場合の様に、世代についても、差のある事が種々ある。即ち世代毎の群は、かなりの長期間に岐たれ、その若い世代の平均型量の大きさは成長せるものとは同じものではない。又性による同種二形態 (dimorphisms) も往々あるのである。ある場合には捕食敵者が活動し、選択的に特殊な形態群のみを又は世代群のある個体のみを破滅せしめ、為に同質集団に、明白なる異質を蒸起する

事がある。又、気温、湿度等の環境の諸特質が生物学的性質に作用を及ぼす事もあって、此等が統計的資料に働き、同質集団に、その結果の全貌を反映するとすれば、頻数曲線は若干の頂点を持つに到るであろう。数学的見地より、二三の最大値を有する頻数曲線の分解方法を眺めて見ても、(2)式の凡ゆる媒介変数を決定する事は最も単純なる場合に於いてさえなお、相当な困難と不確実を示すものである。この不確実性は次の事実により更に増加せられるものである。即ち Gauss の頻数曲線なるものは唯一のものではなく、単に確率の最単純図線であると言うに過ぎないからである。

此の様な確率曲線の例は、二つ或は異った色の球を充たした容器の中より、一球を取り出して、又元え戻し、次の試行に何等、条件の変らない様にして、行った時出来る曲線である。この様な手続きを行って出来た曲線に於いて、その平均よりの偏異分布を眺めて見ると、(1)式の法則に相当しているのである。故に、試行が完全に、而も相互に、独立である時に限り、Gauss の法則は有効なのである。

又試行にも、他の方法がある。即ち球は容器に帰さないで行う場合、又は容器へ戻すにしても、連続的にこれを行っている間に、斯る試行に依存性が次第に醸成されて、多少複雑な法則に応じて、為される場合、或は球を置換するのに、これが遅延せられたり、左右せられたりする様な色々な法則に応じて為される場合等があるのである。

こうして(1)式と異った頻数曲線を得る。生物学的性質の分布を研究するに当り、(1)曲線又は、その偏異によって凡てを表示する事は不可能である事を Pearson は知り、次の如き微分方程式を一般化する事によって、頻数曲線の新しい考えを導入したのである。

$$\phi = A e^{-h^2(x-x_m)^2} \dots\dots\dots (1)'$$

(1)'の対数を取って計算すれば次式を得る。

$$\frac{\phi'}{\phi} = 2 h^2 (x_m - x) = \frac{x_m - x}{\alpha_0} \dots\dots\dots (3)$$

訳註； $\phi = A e^{-h^2(x-x_m)^2}$

$$\log \phi = \log A - h^2 (x - x_m)^2$$

微分して $\frac{\phi'}{\phi} = 2 h^2 (x_m - x)$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2 h^2} \text{とすれば}$$

$$\therefore \frac{\phi'}{\phi} = 2 h^2 (x_m - x) = \frac{x_m - x}{\alpha_0}$$

本式は中の相対的増加は $(x_m - x)$ の差に比例している事を示すものであるが、Pearson は比率 α_0 なるものは、常数ではないと考え、(3)式の代りに次の式を仮定して立てたのである。

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{x_m - x}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2} \dots\dots\dots(4)$$

Pearson の此の一般化に対しては、有利な議論が若干あるのであるが、その一つは前に述べた例の壺の中に球を再び戻すと言う試行である。即ち此の方法によって出来た図式と言うものは、殆んど Pearson の頻数曲線を示しているものである。

この(4)式を解いて得られる曲線は、大いに異った式であって、これは(1)式では不可能な場合でも、若干の分布状態を計算する事が出来るものなのである。

訳註； Pearsonの頻数曲線の微分方程式は容易に微分可能であって、Pearson型の頻数函数は12個出て来るものであると言われる。

扱て、生物問題に戻って、論じれば、大きさとか又、他の生物学的性質を決定する諸多の要因と言うものは、決して独立したものではなく、相互に関連し、依存しているものである。故に分析の結果色々の曲線が得られるでもあろうが、凡ての曲線は、同根の基礎に於いて、認容せられる事が出来るものでなければならないのである。諸々の性質分布を再現せしめるに当って、夫々の曲線に対しては確率図線が、有難い事には、示されているものであり、而もそれを使用する事は何等差支えのない事を示している。数学的自然科学者にとって、この事は、選択の自由を与え、(1)式でなければならぬと言った様な狭い判断がなくなった事を意味するものである。

2. 頻数曲線の展開

頻数多角形は時と共に変化するであろう。例えば、同種集団に於いて一形質の分布状態を研究しようとするれば、又年齢と共に変化する事も予想されるのである。従って、ある時点で得た多角形は、年齢と共に変動する係数によって、決定せられる何等かの頻数曲線型によって、示されることが出来る。即ち、身長の様なものも此の例であって、一般に各年齢別の頻数多角形等を形成している様なもので

ある。而して、該多角形を更に Gauss の曲線で示し、年齢別平均身長、個体数、及び分散度等を計算する事が出来るのであるが、凡て此等の媒介変数と言うものは、単なる数ではなく、生物学的意義を事実有しているものである事は勿論である。故に年齢の変異研究は価値ある結果を示すではあろうが、斯る方法だけでは、凡ゆる場合を満足せしめると言う訳には行かないであろう。単に部分的に、集団発展を示すと言う事であれば、頻数曲線の中でも、ある型のものが往々にして之によく適する事があるものである。そこで他の表現を求める事が必要になってくるのである。又、或る時は、簡単な因果依存関係が存在している事が発見され、その為に分布状態が決定せられて、統計的表示と言う事が、全く意義のない、無価値のものになってしまうと言った様な場合もあるのである。以下此の様な条件を具備している例を述べて見よう。

蛾の一種である *Lithocolletis populifoliella* Tr の雌は^{はこやなぎ}白楊の葉上に産卵するもので、Poléjaeff はこの葉の上の卵数と葉上表面積との関係、及び卵数と葉上の幼虫死亡との関係を研究したところ、第三図の如く、此等の蛾によるところの葉上の汚染に三段階がある事を認めたのである。

今 f を葉上表面積、 p を葉上の卵数とすれば、第三図の示す如く、三回の連続的放卵があった訳である。即ち 6 月 13 日、17 日及び 21 日で、斯る時は、卵数は一葉に付、この表面積に比例するものである。

$$\text{故に } p = A f \dots\dots\dots (5)$$

A は活用率で、日時と共に変化している。

即ち

日 時	6 月 13 日	6 月 17 日	6 月 21 日
A (活用率)	0.42	0.91	1.28

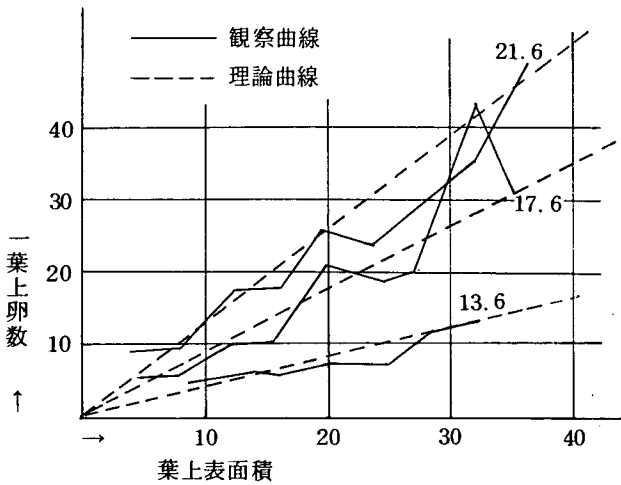
上表の如く、葉上表面積を広く活用する割合が、漸次不活発になって減少している。

訳註；A の数字が高くなっているのに不活発であると言うのは(5)式に示してある様に、一個の卵の占める葉上表面積が平均して大きくなればなる程、即ち換言すれば葉上表面積を広く活用した事になる訳である。その時は、 p が小数で、 f が大なればなる程、活用の範囲が大と言う事になる。此の時は $A = \frac{p}{f}$ で小なる値をとり、即ち小なる値の時が、活用率大で、大なる値の時活用率が少いと言う意味に、上表の数値を考えている訳である。

こうした事実は如何に解釈される可きであろうか？ 第一に考えられることは、解釈としては(5)式によって、想定せられる事が出来るということである。即ち、卵数と産卵時に於ける昆虫の移動径路との間の関係問題である。

然し、これは、一日一産卵と言う仮定の下に於いて、妥当なものであって、この様な一日二回以上は産卵しないと言う仮説は、事実と一致しないのである。何故なら、産卵第一日に卵数は 4 個より 13 個まで変化しているからである。然し一面、此等の卵は、如何なる葉上に於いても、一匹の雌のみによって、産卵せられたものでないことも考えられるのである。何れにしても、一日一卵の仮説は事実と矛盾するものである。更に第三図によれば第 1 日目と第 5 日目の産卵期間に使用した小葉数は増加していることを示している。又、卵の最大、最小両面積間に於ける割合が減少している事は次表の如くである。

第三図



蛾による白楊葉上の汚染状態

産卵第9日目即ち、6月21日の葉上の活用は第1日目6月13日より大ではあるがその率から見れば完全ではない。Polejaeffについての様態を調べたところ長い葉面に先づこの徴候が示されているのを見たのである。この現象はとりわけ孵卵幼虫に必要な食料を確保しようとするものである事と思われる。このために第一日に既に産卵された葉を成る可く避け、長い葉を選択しているのである。第二日目に到ると、既に葉の長短を選ばずして利用し得る葉上、凡て如何なる部分にも卵を置いてある。そしてAという活用率の増加が次第に遅滞して居るのは、未だ使われていない面を求める事の困難がや

日 時	6月13日	6月17日	6月21日
最大面積	6.80	2.30	1.10
最小面積	0.40	0.20	0.25
<u>最大面積</u> <u>最小面積</u>	17	11.5	4.4

や増大していることを察知する事が出来るでもあろう。この事柄は昆虫側より之を眺めても、その産卵方法は当を得ず、甚だ悪い適応を示しているものであると言ってもよい。即ち一葉上に幼虫が多数に存在する事はひいては、流行病を容易ならしめ、寄生菌、捕食動物を呼びよせて幼虫それ自身にとっても、多くの不都合をひき起すものである。

以上此等昆虫の彷徨に於いては、機会と言う偶然さが大なる役割を演じているとは言え、終局、結果の帰するところは、極めて簡単な因果関係に従っている。

3. 相関及び因果関係

二現象間の因縁研究は容易ではないが Galton は若干の場合に役立つ実験方法を示唆している。今観察に依って、二数列

$$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

を得たとし、この間次式の如き関係が成立し得るものとする。

$$F(x, y) = 0 \dots \dots \dots (7)$$

更に、函数 $F(x, y)$ は Taylor の理論に依り、展開可能で、一次以上の項は凡て無視的極微小とすれば次式の如くなるのである。

$$F(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \dots \quad (8)$$

訳註； Taylor の定理

一般に本文に於いて掲げたものは Taylor の定理を拡張したもので、今之を簡単に述べて見よう。今一変数の場合を論ずるに $f(x)$ なる函数はある変域にて次の如く x の冪級数に表現されるものとする。即ち

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

之を逐次に微分する。

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= n! a_n + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

一般に

此等級数の収斂域は常に 0 という値を含む故に(1)(2)に $x = 0$ と置けば

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 & f'(0) &= a_1 & f''(0) &= 2 a_2 & f'''(0) &= 3 \cdot 2 a_3 = 3! a_3 \dots \\ f^{(n)}(0) &= n! a_n \dots \dots \dots & & & & & & \text{となる。} \end{aligned}$$

一般に $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ この形を逆に(1)に代入すれば

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (3)$$

という式を得る。この右辺の無限級数を Maclaurin の級数と言う。そして今 $f(x)$ という函数に於いて x が若干変じて $x+h$ になった時の函数の値 $f(x+h)$ は h の函数として考える事が出来る。

$$\therefore f(x+h) = F(h)$$

故に $F(0) = f(x)$, \dots , $F^{(n)}(0) = f^{(n)}(x)$ であるから

$$f(x+h) \text{ を前述の Maclaurin の級数により } h \text{ の冪に従って展開すれば}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(h-1)}(x)}{(n-1)!} h^{h-1} + R_n \dots \quad (4)$$

なる式を得る。 R_n は剰余で n を無限大にする時剰余が 0 になれば本級数は無限級数に展開されてくる。

(4) を Taylor の定理と言う。そして本文に示されているのは、二変数の場合である。これも同様に次の如く考えればよい。

即ち函数 $F(x, y)$ は連続なる第 n 次偏導函数を有するものとし、二変数は共に若干変化したとすれば $x \rightarrow x+h$ $y \rightarrow y+k$ とする事が出来る。依って $F(x+h, y+k)$ は、 h 及び k の函数として考え、斯る³ 幕に展開しようとするのである。

即ち任意の変数 t を用いて

$$u = x+h = x+\alpha t \quad v = y+k = y+\beta t \quad \text{とすれば}$$

$$V(t) = F(u, v) = F(x+\alpha t, y+\beta t) \dots\dots\dots (5)$$

と置く事が出来る。之を t に関して n 度微分して

$$V^{(n)}(t) = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v} \right)^n F(u, v) \quad \text{を得る。}$$

そして $t=0$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} V(0) &= F(x, y) \\ V^{(n)}(0) &= \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right)^n F(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

そこで Maclaurin の定理に依って $V(t)$ を t の³ 幕に従って展開すれば

$$V(t) = V(0) + V'(0)t + \frac{V''(0)}{2!} t^2 + \dots\dots + \frac{V^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{V^{(n)}(\theta t)}{n!} t^n$$

本式に(5)(6)を適用すると

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) &= F(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) F(x, y) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F(x, y) + \dots\dots\dots \\ &\dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} F(x, y) \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n F(x+\theta h, y+\theta k) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

(7)式は Taylor の定理の二変数からの函数に拡張したものである。

そして前述と同様に n が無限大に到る時は

$$\text{即ち } \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n F(x+\theta h, y+\theta k) = 0 \quad \text{になる時は以上の展開式}$$

は無級数となるものである。この(7)式に於いて $x=y=0$ として後、 h, k をそれぞれ x, y と書き直せば

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= F(0, 0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) F(0, 0) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F(0, 0) + \dots \\
 &+ \frac{1}{(n-1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} F(0, 0) \\
 &+ \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(\theta x, \theta y) \dots \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

この(8)式は即ち Maclaurin の定理の拡張である。そして斯る Taylor の拡張定理を応用して、その一次までの項を本文には示したものである。然し注意すべき事は以上の展開式は最初より函数 $f(x)$ 又は $F(xy)$ の展開が可能であると言う仮定の下に行ったもので、 $f(x), F(xy)$ なるものが展開すれば必ず以上のような形式を有すると言うだけで、函数が展開可能か否か、又この級数が如何なる変域に於いて収斂するか否か、又収斂するとしても其和が果して原函数に等しいものであるかどうかは剰余 R_n の極限值問題等になって、問題は自ら又別途の事である。

以上(7)(8)式より次式を得る

$$a_0 + a_1 x + a_2 y = 0 \dots \dots \dots (9)$$

斯る x, y 間の相互関係が上式の如く許容せられるとすれば、次の諸点

$(x_1 y_1), (x_2 y_2), \dots \dots \dots (x_n y_n)$ は(9)式に依って示される直線より距る事がそれ程遠くはないと言う事が了解されるであろう。

そしてこの直線を想定して、本直線とある任意な点 $(x_k y_k)$ との間の距離を評価すれば次式の如くである。

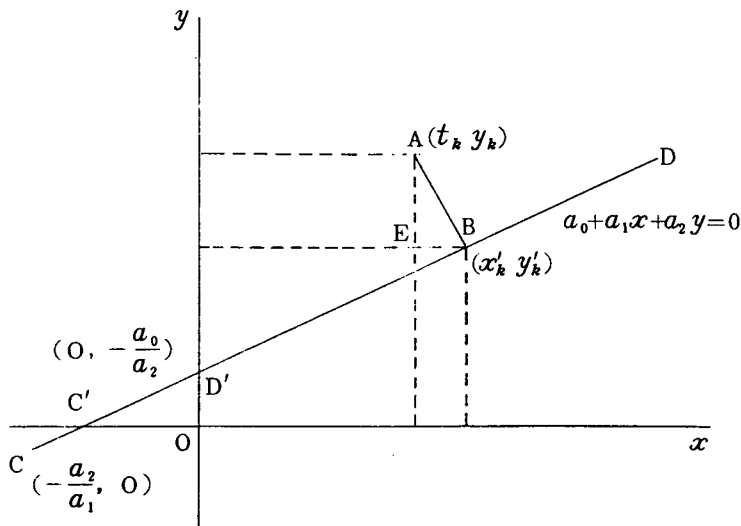
$$E = \sum_{k=1}^n \frac{(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k)^2}{a_1^2 + a_2^2} \dots \dots \dots (10)$$

訳註；直線の方程式は本文にあるように

$$a_0 + a_1 x + a_2 y = 0 \quad \text{である。}$$

今点 $(x_k y_k)$ より本直線に垂線を下し、その点を $(x'_k y'_k)$ とする。そして本直線横縦軸上との交点は x, y をそれぞれ 0 とおいて得られる。

$$\left(-\frac{a_0}{a_1} \ 0\right) \left(0 \ -\frac{a_0}{a_2}\right) \text{の点である。}$$



左図によって解明して見よう。A(t_k, y_k)点より直線CDに下したをB(x'_k, y'_k)とする。そして本図に於いては $a_2 < 0$ なるを要するものである。そしてABの長さを求め様とするのであるがABよりそれぞれ軸へ垂線を下し交点をEとする。この時は
 $\triangle C'OD' \sim \triangle AEB$ となる。

$$\therefore \frac{y_k - y'_k}{x_k - x'_k} = \frac{a_2}{a_1} = K$$

$$\therefore y_k - y'_k = a_2 K \quad x_k - x'_k = a_1 K$$

(x'_k, y'_k)は原方程式を満足するから上式より

$$a_0 + a_1(x_k - a_1 K) + a_2(y_k - a_2 K) = 0$$

$$\therefore K = \frac{a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k}{a_1^2 + a_2^2}$$

そして $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB} &= \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EB}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x'_k)^2 + (y_k - y'_k)^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2) K^2} \end{aligned}$$

本式にKの値を代入して計算すれば求める式を得る

$$E = \overline{AB}^2 = \frac{(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k)^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{そして } k = 1 \dots n \text{ まで各点につき同様に}$$

総和すれば本文の(10)式を得るのである。

$$\text{即ち } E = \sum_{k=1}^n \frac{(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k)^2}{a_1^2 + a_2^2}$$

そして本文の距離は正負を消す為に自乗の形式で示されているものである。

更に単純化して $X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ $Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$ $A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$ $B = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2$

$$C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \cos \theta = -\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \sin \theta = -\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \text{と置けば}$$

(10)式は次式の如くなる。

$$E = \sum_{k=1}^n (d - x_k \cos \theta - y_k \sin \theta)^2$$

式は $E = n (d^2 - 2 X d \cos \theta - 2 Y d \sin \theta + A \cos^2 \theta + 2 C \cos \theta \sin \theta + B \sin^2 \theta) \dots (10')$

この(10)'を最小ならしめる d 及び θ を求めるには E の導函数を 0 に等しいとすれば次の式を得る。

$$d - X \cos \theta - Y \sin \theta = 0 \dots (11)$$

又は $d X \sin \theta - d Y \cos \theta + C \cos 2 \theta - \frac{A - B}{2} \sin 2 \theta = 0 \dots (12)$

訳註 ; (10)' を θ に関し微分すれば

$$\begin{aligned} & n (2 X d \sin \theta - 2 Y d \cos \theta - 2 A \cos \theta \sin \theta + 2 C \cos^2 \theta - 2 C \sin^2 \theta \\ & \quad + 2 \sin \theta \cos \theta) \\ & = 2 n \{ X d \sin \theta - Y d \cos \theta - (A - B) \sin \theta \cos \theta + C (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \} \\ & = 2 n \{ X d \sin \theta - Y d \cos \theta - \frac{A - B}{2} \sin 2 \theta + \cos 2 \theta \} \end{aligned}$$

以上の式を 0 と置けば(12)式を得る。

(11)式は各点 (x_k, y_k) の重心 (X, Y) は(8)式線上にある事を示し、(12)式は此等の諸点に関して θ の値を決定するものである。

即ち $\tan 2 \theta = \frac{2 (C - X Y)}{A - X^2 - B + Y^2} \dots (13)$

更に E の最小値は次の方程式を満足する。

$$E^2 - E n (A + B - X^2 - Y^2) + n^2 [(A - X^2) (B - Y^2) - (C - X Y)^2] = 0 \dots (14)$$

そして容易に知られる事は、

$$A \geq X^2, B \geq Y^2, (A - X^2)(B - Y^2) \geq (C - XY)^2$$

故に $r^2 (A - X^2)(B - Y^2) = (C - XY)^2 \dots\dots\dots(13)$

と書く事が出来る。但し $r^2 \leq 1$ 。

訳註；(13)式は次の如くして得られたものである。

(11)式 $d = X \cos \theta + Y \sin \theta$ を(12)式に代入する

$$(X \sin \theta - Y \cos \theta)(Y \sin \theta + X \cos \theta) + C \cos 2 \theta - \frac{A - B}{2} \sin 2 \theta = 0$$

$$XY \sin^2 \theta - Y^2 \sin \theta \cos \theta + X^2 \sin \theta \cos \theta - XY \cos^2 \theta + C \cos 2 \theta - \frac{A - B}{2} \sin 2 \theta = 0$$

$$-XY(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (X^2 - Y^2) \sin \theta \cos \theta + C \cos 2 \theta - \frac{A - B}{2} \sin 2 \theta = 0$$

$$-XY \cos 2 \theta + \frac{X^2 - Y^2}{2} \sin 2 \theta - C \cos 2 \theta - \frac{A - B}{2} \sin 2 \theta = 0$$

$$\sin 2 \theta \left(\frac{X^2 - Y^2 - A + B}{2} \right) = (XY - C) \cos 2 \theta$$

$$\therefore \tan 2 \theta = \frac{2(C - XY)}{A - B - X^2 - Y^2}$$

そして(14)式は次の如く書く事が出来る。

$$E^2 - E n (A + B - X^2 - Y^2) + n^2 (1 - r^2) (A - X^2) (B - Y^2) = 0 \dots\dots\dots(14)$$

この方程式は二つの正根を持ち、特に小なる根こそ求める最小値を与えるものである。凡ての点 (x_k, y_k) は(9)線上にあると考える事が出来る。この理想型に於いては、 $E = 0$ であるが(14)式は、 $r^2 = 1$ になる時に限り、 $E = 0$ を示すものである。更に、重心 (XY) を中心とする、諸点の分布状態は相称型である時は $r^2 = 0$ である。しかし他の場合に於ける r^2 は凡て 1 より小で、一群の諸点を表現することが出来るかどうかを直線によって測定しようとする時この係数 r^2 を使用することが出来る。この r は所謂、相関係数と言われるものである。

観察数列(6)を示すのに、直線に依る事が不可能である時は、相関係数は 0 となるが、これは x 及び y の大きさが互いに独立である事を意味するものではないのである。唯、 $F(xy)$ と言う函数は、(9)式の様な線状的表现では近似的にもせよ代用せしめる事が出来ないということだけである。この重大なる事実は屢々忘れられ勝ちで人口統計を行うものは、常に記憶に止めておかなければならない。

訳註；本数式を眺めて探究して行くと最後に著者も言っているように生物理論を研究するに当って、諸多の感があるのである。すなわち、ただ数学的表現を示しているのは理論研究に便利であり、また概念を客観的に取扱う場合、量の、綿密性がある、しかも簡略性に富んでいるからである。しかし一歩、これを突込んで見ると最初に危険性がないとは言い難い点が多々あるのである。即ち数学的認識及び数学的概念の範疇をよく考えず、数学的表現であるからと言って、単に機械的にのみ計算して能事終れりということは戒めるべきことである。数学に於いては、純抽象的理念の活動であるが、生物理論に於いては、必ず、その内容があり実態を有しているからである。即ち、 a 、 b の二数の算法正誤云々を問題にする以前にこの a 、 b で示した生物内容或は実態内容を常に頭に入れておかねばならない。つまり考えて見ると数学式であっても、所謂数学とは違うので、私は生物数理論とした訳なのである。

4. 相関なき二連続数列

相関は零であるが、変数は独立でない、二つの連続数列の例を取扱って見よう。二つの生物学的変数は時間 t の函数であるとする。 w を時間の変域とし、この変域間に於いて、変数 x 、 y は観察せられたものとするのである。総和 X 、 Y 、 A 、 B 及び C は次の如き積分式によって置換せられる事が出来るものとする。

$$X = \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_0+w} x dt \quad Y = \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_0+w} y dt$$

$$A = \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_0+w} x^2 dt \quad B = \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_0+w} y^2 dt \quad C = \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_0+w} xy dt$$

次に x 及び y は変域 w に於いては周期函数であると、しかも

$$C = XY \dots\dots\dots(17)$$

とする。この場合相関係数は零であるが、 xy は密接に因果関係によって、結合せられているのである。此の様な例は、一種属のものが他種属のものを、捕食すると言う二種属より構成されている混合集団の場合に起るものであって、しかも、その終極限時に於いては何れの種属に於いても、その集団密度は無視されてもい程充分に過小なる可き場合である。更に x を捕食される側の種属の数とし、 y を捕食する側の種属の数とすれば、変数 x 、 y は次の様な微分方程式系を満足するものである。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \epsilon_1 x - h_{12} xy \\ y' &= \epsilon_2 y - h_{21} xy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

上式に於いて、各項は次の様な意味を持ったものである。

$\epsilon_1 x$ 項は、捕食種がない時、 x 種属のものが、Malthusの法則、 $x = x_0 e^{\epsilon_1 t}$ によって、増加するであろうと言う事である。

$\epsilon_2 y$ 項は、餌食種が居ない時は、 y 種属が次第に食料に欠乏して、指数法則 $y = y_0 e^{-\epsilon_2 t}$ によ

って、絶滅に近づく事である。

- $h_{12}xy$ 項は兩種属各個体の遭遇によって、餌食種が破滅される事を示している。

- $h_{21}xy$ 項は、反対に捕食種の獲得した利益を示すものなのである。

そして x, y 間には次の様な単純な関係式が成立しているとする

$$x^{\epsilon_2} y^{\epsilon_1} e^{-h_{21}x - h_{12}y} = H \dots\dots\dots(19)$$

この式は、 x, y に関して、 t の周期函数である事を示しているが、これは後になって理解される。今 w を周期として、(18)式より積分総和して、見ると次式の様な関係式を得るのである。

$$X = \frac{\epsilon_2}{h_{21}} \quad Y = \frac{\epsilon_1}{h_{12}} \quad XY = C \dots\dots\dots(20)$$

これは、即ち(17)式の関係を確認したと言う事になり、相関係数は0であるが、 x 及び y は(19)式によって、関係付けられているのである。以上(18)式によって示される様なものは、特殊なものではなく、又純理論的なものでもないのである。事実、周期的又は周期態的振動は混合集団に於いては観察されるところで、この場合に、相関方法を適用する事は、かえって混迷に陥り、又生物学的変数間の独立性を求め様として、計算すれば龐大な計算が必要である。しかもその結果は不可能に終り徒勞に終るばかりである。しかし相関方法が全然無用であると言う事ではない。ただその使用限界を制限して、更に解析的方法論を与える意義を持っているということである。

訳註； 本文に周期態的 (periodomorphic) としてあるのは、著者の意は厳密に言って周期的でない振動を表現しようとしたものに過ぎないのである。著者が、殊更に擬周期的 (pseudo-periodic) 及び準周期的 (quasi-periodic) と言う言葉を避けたのは、斯る表現は長い間、現今まで特殊な意味に使用されて来たと言う理由によるのである。

又(19)式の関係は後章、第九章 3.の項を参照されたい。(20)式の関係は(18)式を次の如く変形して行う。

$$\frac{x'}{x} = \epsilon_1 - h_{12}y$$

$$\therefore \log x = \epsilon_1 t - h_{12} \int y$$

これは $t_0 \rightarrow t_0 + w$ までとり w で割れば

$$\frac{1}{w} \log \frac{t_0 + w}{t_0} = \epsilon_1 - h_{12} Y$$

w の周期が小なれば左辺は殆んど0となる

$$\therefore 0 = \epsilon_1 - h_{12} Y \quad \therefore Y = \frac{\epsilon_1}{h_{12}}$$

$$\text{同様に} \quad \therefore X = \frac{\epsilon_2}{h_{21}}$$

又同じ変域に於いての定積分であるから $XY = C$ の関係は明らかである。

5. 一次微分方程式系

次の方程式は同種集団に対して、得られたものである。

$$p' = \epsilon p - h p^2 + I - E \dots\dots\dots(21)$$

移入，移出を示す I 及び E の項は，単に函数 $p(t)$ にのみ依存しているものとする。この時は(21)式は次の如く書く事が出来る。

$$p'(t) = \phi [p(t)] \dots\dots\dots(22)$$

同様に，異った諸群 $p_1 p_2 \dots\dots\dots p_n$ より成る混合集団の場合に於いても，此等の変数は一次の微分方程式を満足するものである。

$$p'_k = \phi_k (p_1 p_2 \dots\dots\dots p_n) \quad (k = 1, 2 \dots\dots\dots n) \dots\dots\dots(23)$$

大略，函数 ϕ_k は函数 $p_1 p_2 \dots\dots\dots p_n$ に関して二次の多項式である。この簡単な仮設の下に於いても，(23)式は若干の場合に限り，解かれる事が出来るが，数的解答の得られない場合は，質的研究を以って満足せざるを得ないのであるが，それでも甚だ興味のある生物学的結果を得る事が出来るのである。

今それぞれ値を次の如くなつたものとして見よう。

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2, \quad p_3 = a_3, \quad \dots\dots\dots p_n = a_n \dots\dots\dots(24)$$

これは，代数方程式

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = 0, \quad \dots\dots\dots, \quad \phi_n = 0 \dots\dots\dots(25)$$

を解いて得られるものである。

若し， $p_1, p_2, \dots\dots\dots p_n$ で，(24)に等しい或る初期の値を取つたものとするれば，此等の函数は一定数のままに存続し，混合集団は変化しない。即ち(24)系は固定状態を又は平衡状態を示すものである。問題は，平衡状態と言うものが得られるとしたらそれは安定状態の平衡と不安定な状態の平衡というものゝを區別して分析することである。安定性は様々に定義される事が出来るけれども，一般に係数に於いては僅少の変異を示しさらに結果に於いても，僅少なる変異に終るといふ時に，之を安定性と言ってもよい。この安定性の研究は後章に譲り，今は(24)の固定状態の近傍に於いて，初期の値に僅少の変異があり， $t \rightarrow \infty$ なる時，(24)の値となる様な場合の安定性に就いて述べて見る。こういう安定性が本章に於ける問題点なのである。

$p_1, p_2, \dots\dots\dots p_n$ を以って，(21)の平衡状態に於ける初期の値とし，

$$p_1 = a_1 + \xi_1, \quad p_2 = a_2 + \xi_2, \quad \dots\dots\dots, \quad p_n = a_n + \xi_n \dots\dots\dots$$

とするとこの場合， $\xi_1, \xi_2, \dots\dots\dots \xi_n$ は甚だ僅小な量であるから，比等の自乗や積等は無視されるものとする。此等の値を(23)式に代入する。函数 $\phi_1, \phi_2, \dots\dots\dots \phi_n$ は $p_1 p_2 \dots\dots\dots p_n$ に関する多項式であるから，(23)式を考慮して次の如く書く事が出来る。

$$\phi_k (p_1 p_2 \dots\dots\dots p_n) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial a_m} \xi_m$$

そして(23)式は次の如くなる。

$$\xi'_k = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial a_m} \xi_m \quad (k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (26)$$

此等方程式を解くと、指数函数となり得るものである。又

$$\xi_k = A_{k_1} e^{\mu_1 t} + A_{k_2} e^{\mu_2 t} + \dots\dots\dots + A_{k_n} e^{\mu_n t} \quad (k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (27)$$

とすれば指数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ は n 次の代数方程式を満足する。即ち

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial a_1} - \mu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial a_2} \dots\dots\dots \frac{\partial \phi_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial a_2} - \mu \dots\dots\dots \frac{\partial \phi_2}{\partial a_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial a_2} \dots\dots\dots \frac{\partial \phi_n}{\partial a_n} - \mu \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

これは、特性式又は一般式として知られているもので、 n 個の根 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ を有するものである。此等の根は、実根か虚根であろう。若し、此等が凡て負か、又は負なる実数要素を持ってれば、平衡は安定であり、変動式(27)は 0 に向うのである。若し指数の中、一つでも、正か、0 となる場合は又は実数要素が正か又は 0 であれば、平衡は不安定である。例えば、 $n=2$ の場合を考慮すれば(28)式は次の如き形となる。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial a_1} - \mu, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial a_2} - \mu \end{array} \right\} = 0$$

又は $\mu^2 - \mu C + D = 0 \dots\dots\dots (29)$

但し $C = \frac{\partial \phi_1}{\partial a_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial a_2}, \quad D = \frac{\partial \phi_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial a_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial a_1} \dots\dots\dots (30)$

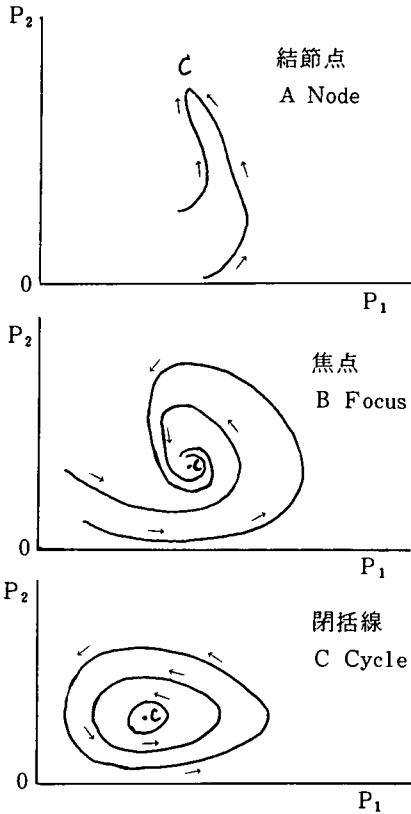
$C < 0, D > 0, E = C^2 - 4D > 0$ なる時は結節点があり、即ち特性式の二つの解は負で、点 (p_1, p_2) は (a_1, a_2) に接近し、弧形を示すものである。(第四図 A)

$C < 0, D > 0, E = C^2 - 4D < 0$ なる時は焦点があり、即ち(29)の根の一部は実根で負である。そして点 (p_1, p_2) は (a_1, a_2) に接近し、螺旋形曲線を描く。(第四図 B)

$C = 0, D > 0, E < 0$ なる時は、閉括線である。即ち、(29)の二つの解は、全く虚で、点 (p_1, p_2) は、点 (a_1, a_2) の周囲に閉じた曲線を描くものである。(第四図 C)

この事は前節に於いて考察される場合に起るものであるが、(29)は(24)式に示す様な若干組の解を有し、此

第四図



等諸点の夫々は固定状態に相当するもので、負から成っているものであるか或は複合型で示される事があるので、本節に於いては、何等興味のあるものではない。その他のものは安定か不安定か何れかのものとなろう。安定状態の両立しているものが若干有る場合に於いては、生物学的理論系統の終局の如何は、一に懸って、初期の値 $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$ に存し、しかも、夫々の終局状態なるものは、或る変域によって限定され、影響されると言う意味に於いて論じなければならぬ。若し、その初期状態が此等変域の一つにあったとすれば、これが対応している終局状態はその極限であると言う事が出来るのである。変数 p_k は一般に正である。若し此等の中一つが消滅したらどうであろうか？ この意味する処は混合集団中の一群が絶滅する事を示すもので、これが再現には新環境を必要とするものである。例えば移入、又は隠匿されて、そのまま維持されていた卵が孵化した等と言う場合である。もし死滅群が再現すると言う場合に何等、理由のない時は、(23)式はこの様な群の消滅結果を決定する様に修正される必要があるものである。が然し式中、これに相当する変数を0と修正する事はこのような集団中の他群に間接的にも影響を及ぼしてくるため、不十分である。もしも一群の数が0に近づくとすれば、(23)式は慎重に取扱われなければならないのである。と言うのは、生物学的変数と言うものは、本質的には不連続であり、そして(23)式が与えない様な消滅状態は

消滅といっても幾つかの個体が残ることを意味する。これと反対に、生物方程式と言うものは、理論的である為には、大数に関するものでなければならないし、小数に関するものとしては、此等の方程式は異ったものになるであろう。それ故厳密な生物諸問題の吟味に於いては他の解説が又必要とされるのである。

6. 生物学的微分方程式

本章を閉じるに当って、生物学的微分方程式を少しく考えて見よう、凡ゆる場合を通じ、此等を研究する為には、その方程式は主として、次の様な形式に属しているものが多いのである。

$$p'_k = \alpha_k + \sum_{s=1}^n \epsilon_{ks} p_s - p_k \sum_{s=1}^n h_{ks} p_s \dots\dots\dots (31)$$

$$k = 1, 2, \dots\dots\dots n$$

そして、 α_k 項は移入、移出の一定総和を示し、係数 ϵ_{kh} は p_k 群の事実の増加を示しているものである。 $\epsilon_{ks} p_s$ 項は $k \neq s$ であって、一群より他群へ可能な移動者に相当している。例えば年齢別ににした一種属の場合の様なものである。 $h_{kh} p^2$ 項は同様の集団に於いて、他群の活動と言う事を除外した時、凡ての終局要素が p_k 群に働らく、その終極作用を示しているもので、 $h_{ks} p_k p_s$ 項

は群と群との相互作用を示しているものである。此等の色々な群に関しては、勿論、他の判断方法が考えられる事でもあろうが、今は以上の様に一応、断定する事が出来るのである。この方程式は固定状態を示す処の各々異った 2^n 個の諸点を生成しているものである。

以下、論じようとする問題は、一般にかなり特殊化された様な場合である。即ち一群より他群へと移行する事が出来ない様な、ある数群より、構成されている孤立組織系に関して行おうとするものである。この例としては Volterra の方程式がある。

$$p'_k = p_k \left(\epsilon_k - \sum_{s=1}^n h_{ks} p_s \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

理論上、 2^n なる平衡状態の存続する事は常に可能であるので此等を凡て計算する事は容易である。最初のその状態は、

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \dots, \quad p_n = 0 \quad (33)$$

で、凡て増加係数が負の時に限り、此は安定である。即ち $\epsilon_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) \dots (34)

次に次式の如き n 個の固定状態がある。

$$p_k = \frac{\epsilon_k}{h_{kk}}, \quad p_1 = 0, \quad \dots, \quad p_{k-1} = 0, \quad p_{k+1} = 0, \quad \dots, \quad p_n = 0 \quad (35)$$

此等の方程式に依れば、一群を除き、他は凡て消滅する事を示しているものである。この中、若干のものは負で何等重要なものではない。(35)式の示す状態は、次の如き不等式が満足される時安定である。

$$\begin{aligned} \epsilon_k > 0, \quad h_{kk} > 0, \\ \epsilon_s h_{sk} < h_{kk} \epsilon_k \quad (s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (36)$$

此等 n 個の状態は、互いに両立する事が出来るものなのである。例えば第 k 位と第 l 位の二状態に就いて考慮すれば同時に、

$$\begin{aligned} \epsilon_k > 0, \quad h_{kk} > 0, \quad \epsilon_s h_{sk} < h_{kk} \epsilon_k \quad (s \neq k) \\ \epsilon_l > 0, \quad h_{ll} > 0, \quad \epsilon_{s'} h_{s'l} < h_{ll} \epsilon_l \quad (s' \neq l) \end{aligned}$$

従って、 $\epsilon_l h_{lk} < h_{kk} \epsilon_k$, $\epsilon_k h_{kl} < h_{ll} \epsilon_l$

故に $h_{kk} h_{ll} < h_{lk} h_{kl}$

此等の不等式は矛盾するものではないが一方(35)の状態と(36)の状態とは両立しないものである。

次に、次式の如き $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の固定状態がある。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\epsilon_1 h_{22} - \epsilon_2 h_{21}}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}}, \quad p_2 = \frac{\epsilon_2 h_{11} - \epsilon_1 h_{12}}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}} \\ p_3 &= 0, \quad \dots, \quad p_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

このような状態が続行して行くと本系統に於ける凡ての平衡状態を得る事が出来る。そして、此等状態の安定性及び平衡性を中止する事なく、本系の全群が分担している平衡状態について我々は論及し

て行く事が出来るであろう。この状態は線状方程式によって定義される。

$$\epsilon_k = \sum_{s=1}^n h_{ks} p_s \quad (k = 1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

一般式 $\textcircled{8}$ が凡て、負なるか又は、負なる実数部分を有する根 ($\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$) を有している時は本状態は安定であると言い得るのである。

第三章 生活と環境

1. 有機物質の循環

一般に生活過程を考察する時、先づ無機物質との関係に於いて行ふ事が出来る。この物質は若干の形式に於いて存在しているが、大気はその主たる根源である。生命体はこれより、複合成物並びに、生活物質形成に必要な要素を吸収するが吸収物質の同化作用の経過は数段階よりなっているものである。即ち植物は、大気中の炭素を吸収し、炭酸ガスを変換せしめて、澱粉となし、そして酸素を放出する。これに対して海中に生活する有機体は炭酸ガスを吸収し、そして白朮に変換せしめている。窒素は、酸素又は炭酸ガスの変換に比べて更に緩慢である。即ち或る植物と共棲生活を営む土壤の細菌によって固定される。このようにして窒素は更に合成されて活用可能となり、生活物質を形成して終るのである。他の微小有機体に就いて述べれば、有機物質創造に必要な又生活体によっては窒素の吸収を容易にするような自然的要因、例えば雷雨のようなもので、他の要素を固定する。此等の多雑性にも拘らず、凡て本経過は簡単な微分方程式の形で摘要される事が出来これによって無機物質界と一般に関連している生活過程の本質についてその知識を供給する事が出来るのである。我々は此等反応にたずさわる夫々の物質の主な根源や及び最終の用途について以下ざっと眺めることにする。

訳註；本章は再生産理論に参考となるものである。

(1) 大気中の酸素

化学的親和性と言う面から考えると空気中の酸素は地球表面上の大気の固有な成分の一つとして見做す事は出来ない。即ち寧ろ生活体が活動する結果であると言える。大気中の炭素が同化作用を営む道程に於いて、植物から放出され、人類の働態に限らず、呼吸に於いても、生活体の凡てによって吸収されるのである。それ故、植物体中に行われる化学的作用の外に、此の互斯体の何等かの根源を、指摘する事は不可能である。

(2) 大気中の炭素

此は主として二酸化炭素（炭酸ガス）の形で存在している。此の根源は、火山作用、動植物体に於ける呼吸、有機体の分解等にこの互斯が放出されこれを地殻の無機物体が酸化する等に求められる。移動原因は、植物及び白朮製成有機体による炭酸ガスの吸収の為である。本質的にはっきりし差異が見られるのは、炭酸ガスを直接に吸収する有機物と、既に同化されている炭素を単に活用する有機物との関係である。

(3) 大気中の窒素

此は土壤に於ける微生物の援助の下に有機体に依って同化され、或る分解の過程に於いて遊離されるようである。窒素が、地殻に於いて、或る化学反応によっては放出されないものであると主張する事は出来ないがこれに関しては未だ何等直接的の実証がない。

(4) 大気中の水素

大気中の下層に斯る気体が僅かばかりあるだけで、これは生活過程に於いては誠に、その微量のみが参加しているものである。

(5) 水

生物にとって水の重要性に関しては繰り返す必要はないがこの循環の研究は、以上の大気中のガス体に関する研究の様有用な知識が与えられていないのは甚だ遺憾である。

(6) 地殻の軽便な要素

この要素は或る程度、生活体組成に透入しているが、これ等の循環を考えるのには時期尚早であろう。ここで、根本的に重大な役目を果しているのは水であって、即ち、溶剤として、運搬者として、又配布者として有用である。然し乍らこの循環の主な方法は未だ詳かでない。したがって我々は本章に於いては三つの主要なる大気中の気体の循環に関する数学的研究に止める次第である。

2. 炭素と酸素の循環

先づ炭素と酸素の循環について特別な問題を考慮しよう。今

- x = 自由なる大気中酸素の全量
- y_1 = 大気中炭酸ガスの全量
- y_2 = 海中に溶けている炭酸ガスの全量
- z = 白亜形成有機物に於けるこれら物質の全量
- u = 動物体内に於けるこれら物質の全量
- v = 植物体内に於けるこれら物質の全量
- s = 地殻を通して散乱されたこれら物質の全量

とする。

これらの変数間の関係は単純な図式によって示されることが出来る(第五図)又次のような微分方程式によっても説明され得るものである。

$$x' = -\alpha_{13}u + (\alpha_{41} - \alpha_{14})v - \epsilon_{15} \dots\dots\dots(1)$$

$$y_1' = \alpha_{32}u - (\alpha_{24} - \alpha_{42})v + \epsilon'_{52} \dots\dots\dots(2)'$$

$$y_2' = \epsilon''_{52} - \gamma z y_2 \dots\dots\dots(2)''$$

$$u' = -(-\alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35})u + \beta u v \dots\dots\dots(3)$$

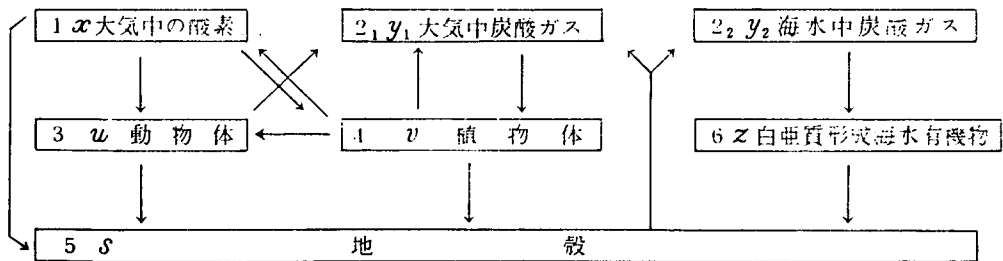
$$v' = (\alpha_{14} - \alpha_{41} + \alpha_{24} - \alpha_{42} - \alpha_{45})v - \beta u v \dots\dots\dots(4)$$

$$s' = \alpha_{35}u + \alpha_{45}v + \alpha_{65}z - \epsilon'_{52} - \epsilon''_{52} + \epsilon_{15} \dots\dots\dots(5)$$

$$z' = -\alpha_{65}z + \gamma z y_2 \dots\dots\dots(6)$$

この方程式の構造は甚だ簡単である。各項は、第五図に示している矢印のそれと一致している。

第五図 酸素及び炭素の循環



訳註； 微分方程式中係数右下の数字は第五図の矢印による図式番号と一致している。たとえば、 α_{13} は大気中の酸素より動物体へ吸収される割合を示す記号である。以下同説

(1)式の示す処は動物体 ($-\alpha_{13}u$) 及び植物体の呼吸作用 ($-\alpha_{14}v$) による酸素の消費を意味し、又地殻 ($-\epsilon_{15}$) の無機物質の酸化作用による消失を意味している。更に植物の同化作用による遊離をも示している。

(2)' 式は生活体の呼吸作用、及び分解腐敗の過程中動物の放出する ($\alpha_{32}u$) 炭酸ガス及び植物の放出する ($\alpha_{42}v$) 炭酸ガスを大気が受領している事を示し、更に、植物体の同化作用により、炭酸ガスが消費 ($-\alpha_{24}v$) される事も示すものである。 ϵ'_{52} 項は、火山爆発や地殻の他の化学反応の為に放出された炭酸ガスを大気が受領するのを示すものである。鉱物資源エネルギーを急速に破壊している人類の産業活動は完全にこのような生態循環系を無視しておる。数世紀経れば、此等の資源は無くなり、人類はエネルギーの供給を他に求めざるを得ない。本期間に於いて遊離された炭酸ガスは、大気、海洋間に散布されているから、何等補助項目を導入する事なく本方程式を応用する事が出来るのである。しかし大気炭酸ガスの分散その他を別の係数で代用せしめてもよい。

(2)'' 式は水圏に属するものである。海洋中に溶解している炭酸ガスの総量は大気中のそれよりも30倍乃至40倍に達している。これらの方程式を単純化する為には、以下若干の仮定が必要である。即ち、此の釣合は不変なものであるし、大気の介在によって、海洋の受容量は一定なものとし、炭酸ガスに関する ϵ''_{52} 項は地殻によって供給されるものとし、 $-\gamma z y_2$ 項は海洋白亜質形成物によって吸収された溶解炭酸ガスを示すものとするのである。

(3)式に於ける $\alpha_{13}u$ 、 $-\alpha_{32}u$ の二項は、動物体と大気との交換であって、一つは之に与え他は之より奪う量を示すものである。又 βuv は、動物が生存する事は植物の消費に於いてなされるものであり、しかもその過程たるや捕食者と犠牲者間の所謂遭遇原理によって律せられる事を示すものである。 $-\alpha_{35}u$ が示しているものは動物体の新陳代謝産物によって土壌が肥沃化する事である。(4)(5)(6)式については、何れも、その組成法は以上の諸式と異なる。最も困難な問題は(2)' (2)'' 式では、正確に表現されないものがあることで、それは大気中、海洋中の炭酸ガスの間に於ける関係である。Schloesing に依れば、大気中のガス圧力が減少する時は、海洋は炭酸ガスを失い、その逆の時は吸収すると言う意味で、海洋の水量は炭酸ガスを調節すると言う事である。この作用は、係数 α_{32} 、 α_{24} 、 α_{42} の恒常度を保証し、従って、 α_{13} 、 α_{14} 、 α_{41} の諸係数をも一定ならしめるが、 ϵ'_{52} 及び ϵ''_{52} の値を不確定ならしめるものである。酸素に関しては、此等の係数は一定ではない。大気中のこのガス圧力に依存するのであるが大気中の酸素重量と言うものは、 α_{32} 、 α_{24} 、 α_{42} 、 α_{13} 、 α_{14} 、 α_{41} の比較的恒常性を確保ならしめるのに十分大である。かくして、これらの係数を恒常なものであるとする仮定はその真実性に影響する処は大でなく、したがって(1)式乃至(6)式より導出される結論は猶、真理があると言う事が出来る。注意しなければならぬ事柄は、これらの方程式に於いて、各項は二様に示されている事である。即ち一は正、他は負の記号としてである。それ故更に次の式を附加する事が出来る。

$$x' + y'_1 + y'_2 + u' + v' + s' + z' = 0 \dots\dots\dots(7)$$

故に $x + y_1 + y_2 + u + v + s + z = M \dots\dots\dots(8)$

これは地球の重量が恒常性であると言う事を一般に示しているものである。(1)式より(6)式までは三つの群に整頓される。即ち

- 1) 変数 x , y 及び s は右辺に現われず。よって(1)(2)'(5)式は、他の諸項の値が既知の時は、これら変数を計算する事が出来る。
- 2) (2)'' 及び(6)式は単に $y_2 z$ の二変数だけを含んでいるものである。
- 3) 同様に(3)(4)式も単に u , v のみを含んでいる。
- 以上の事柄から(3)(4)式より始めれば次式を得よう。

$$u' = u(-\lambda + \beta v), \quad v' = v(\mu - \beta u) \dots \dots \dots (9)$$

但し $\lambda = \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{13}$

$$\mu = \alpha_{14} - \alpha_{41} + \alpha_{24} - \alpha_{42} - \alpha_{45}$$

媒介変数 $\lambda > 0$ の時、これは植物のない時は、動物が生存し得ない事を意味する。
 媒介変数 $\mu > 0$ の時、これは動物が存在しない時は、植物は障害なく繁茂する事を意味する。
 (9)式は単に第二章(18)式の特例である。そして第二章(19)式はこの時は次の様になる。

$$u'' v^\lambda = H e^{\beta \mu v} \dots \dots \dots (10)$$

(10)式には時間の概念が明らかに導入されていない。このHの値の中或る限界を超えない各々正の値に対しては、(u, v)なる変数の図表は、閉括線と一致するものである(第四図の3)これは類似の積分曲線によっては切断されないものである。即ちこれの意味する処はu, vは時間tの週期函数であると言う事である。wを週期としてCの座標を

$$u_c = \frac{\mu}{\beta} \quad v_c = \frac{\lambda}{\beta} \quad \text{とする。これは(10)曲線凡ての共通中心である。本週期は単に係}$$

数 λ, μ, β に依存しているばかりでなく、常数Hにも依存しているものである。即ち $u_0 = u_c$ 及び $v_0 = v_c$ の時の値は0でH=0の時は無限となる。u, vの平均値が夫々 u_c, v_c に等しい事は既述の通りである。

$$\frac{1}{w} \int_0^w u dt = u_c = \frac{\mu}{\beta} \quad \frac{1}{w} \int_0^w v dt = v_c = \frac{\lambda}{\beta} \dots \dots \dots (11)$$

これは純粋に虚なる週期である。と言うのは(9)式は最初の近似値に対して真でなく、生活係数も一定でなく、漸変するからである。したがって現実には、この虚週期性は真なる現象と一致し、若干不規則的ではあるが週期態的変動と一致するのである。(uv)の系列は本週期性を通して示され、その期間を拡大しても、甚だしく大とならない様にして観察すればこれは週期的振動とも見られる。(uv)にて示される曲線は尖端及び極限を有する事もあろう。即ち前者は危険なる状態に一致し、後者は比較的安定なる状態に一致しているものである。どんな場合に於いても、見られる現象としては、長短の差こそあれ、一連の振動現象を有機界の現実構造は示していることで、ただ火山活動や氷河作用等々の平衡状態を攪乱する外的要因が加はる場合は又別である。有機界の新系統の一環境に適応せんが為にこのような振動現象がなくなることがあるが之は終には新しい固定状態、即ち永久的でない新しい一安定性に到るものである。

次に(2)'' (6)式を考察して見よう。今数字を除いて更に単純化すれば次の如くである。

$$y' = \epsilon - \gamma z y \quad z' = -\alpha z + \gamma z y \dots \dots \dots (12)$$

この作用は安定固定状態に向って、進むものである。

$$y_c = \frac{\alpha}{\gamma} \quad z_c = \frac{\varepsilon}{\alpha} \dots\dots\dots (13)$$

“安定的”という言葉は(13)式で示されている状態が多少とも維持され得ると言う意味に於いて解釈されねばならない。(12)式の係数は変動するものであり(13)式の状態はそれらと共に変化することは確定的な事である。 t_0 時まで火山の効果は弱いものであるとすれば $\varepsilon \beta \ll 4 \alpha^2$ で(13)式の固定状態は殆んど達せられたと言える。更に此の瞬時より t_1 時に到るまで火山活動の週期が勃発して ε より遙に大なる E の平均効果を伴ったとする。 $E \gg \varepsilon$

平衡は攪乱され、(yz)系は新しい平衡状態へと赴く。 $Y_c = \frac{\alpha}{\gamma} = y_c \quad Z_c = \frac{E}{\alpha} \gg z_c$

この状態は t_1 時に於いて殆んど達せられたものと言える。明白に海洋中炭酸ガスの新しい終極量 Y_c は初期量 y_c に等しいけれども、海洋白亜質形成有機体の総量は増加しているものである。この火山活動再発後、通常の関係が再び回復されて $t > t_1$ 期間の時、炭酸ガスの効果が再び ε に等しくなったとすれば (yz) の状態は(13)式で示される平衡の初期状態に向うものであろう。即ち減少螺旋曲線を示すのである。本過程のその始めに於いては、略々週期的であって、海洋及び大氣中に保有されている炭酸ガスの量は夫々一連の最大量及び最小量を一応示すものである。

訳註； \ll 及び \gg なる不等号は単に $<$ 及び $>$ より更に遙に大なる差を示す為に用いたものである。
 Y_c の c は center (中心) の略である。

これは又、海洋白亜質形成有機体の総量に就いても同様であり、従って、陸上生物は危機に頻するに到るであろう。

(12)式の係数は近似的に計算される事が出来。火山及び他の内部的資源は、年に、平均 10^8 仏噸 (1 仏噸 = 千疋, 即ち 266 貫 667 匁) の炭酸ガスを放出する。又海洋生物体の総量は 10^{14} 仏噸の単位であり白亜質生成量は 10^{13} 仏噸である。しかし、海洋中に溶解している炭酸ガスの量は 10^{14} 仏噸であるから、次の値を得る事が出来る。

$$\varepsilon = 10^8, \quad y_c = 10^{14}, \quad z_c = 10^{13}, \quad \alpha = 10^{-5}, \quad \gamma = 10^{-19}$$

以上の値は $\varepsilon \beta \ll 4 \alpha^2$ を立証するものであってこの不等式は、平衡状態が攪乱された後再び週期態の振動を現出せしめるのに必要なものである。そしてこの振動を追求して如何なる足跡が発見されるであろうか？ 一塊の白亜層はこの機構によって説明される事が出来るであろう。即ち黒海の海洋堆積層は 2 乃至 3 千年の週期性を示しているものと思われる。私はこの振動を第四紀の氷河期に関係付け様と努力したのであるが、別の週期的機構を見出した。これによって、氷河期それ自身ばかりでなく、氷河を伴っている凡ゆる現象に関して、よりよく説明が出来た。

次に我々は(1)(2)' (5)式を考慮しよう。この期間は比較的安定なものとして考えられる。即ち(13)式の固定状態は深海の有機体及び溶解している炭酸ガスに関する限り、略々達せられたものと考えられる事が出来るのである。

そして、 $y_2 = \frac{\alpha_{65}}{\gamma} \quad z = \frac{\varepsilon''_{52}}{\alpha_{65}}$ と置き、 t に関して t より $t+w$ まで(1)(2)' (5)の諸式を積

分すれば、 x , y , s の平均増分は次式の如きものを得るのである。

$$\frac{x(t+w) - x(t)}{w} = -\alpha_{13} \frac{\mu}{\beta} + (\alpha_{41} - \alpha_{14}) \frac{\lambda}{\beta} - \epsilon_{15} \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{y_1(t+w) - y_1(t)}{w} = \alpha_{32} \frac{\mu}{\beta} + (\alpha_{42} - \alpha_{24}) \frac{\lambda}{\beta} + \epsilon'_{52} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{s(t+w) - s(t)}{w} = \alpha_{35} \frac{\mu}{\beta} + \alpha_{45} \frac{\lambda}{\beta} - \epsilon'_{52} + \epsilon_{15} \dots\dots\dots (16)$$

訳註；上式は平均値の定理より t , $t+w$ 間に $\frac{x(t+w) - x(t)}{w} = x'$ なる如き t の値が少くとも一つ存在すると言う仮定の下に左辺を置換したもので、右辺は(14)式を用いて書き換えたものである。

終局の結果、或は少くとも本過程の現実趨勢は、この生活係数に依存するものである。若しこれらの係数の中で簡単に成立する事が出来て、しかもそれ自身、単純な生物学的解釈を得るに到る様な、ある不等式と一致したものであれば、大気中のガスは、週期的振動に従って増減律動の状態にあると言う事が出来る。例えば $\alpha_{14} - \alpha_{41} < 0$ と考えれば、これは植物が呼吸作用に於いて使用する以上の酸素を放出している事で又 α_{13} 及び ϵ_{15} は(14)式に対して正であり得るに十分な程小なるものである事を意味するものなのである。この場合、遊離している酸素の量は連続的に増加するであろう。又 $\alpha_{42} - \alpha_{24} < 0$ であるとすれば、植物は呼吸作用に於いて放出する以上の炭酸ガスを吸収している事を意味するのである。更に $\alpha_{32} \epsilon'_{52}$ は(15)式に於いて、負であり得るに十分な程小なるものであるとする。このような場合は、大気中の炭酸ガスは海洋の調節作用を除けば、連続的に減少するであろう。しかし、この保存物それ自体は無尽蔵なものではないと思われる。(14)(15)(16)式より導き出される他の結果については、今は考えられない事である。

3. 窒素の循環

以上の結果は、窒素の循環研究によって完璧となる。問題を簡略にする為に大気中の窒素を固定する事が出来る微生物と植物との共棲生活を営む場合を考察して見る。即ちこの事柄は現実の効果を調べて見るのに、結果に及ぼす影響は認知し得る程度のものではないが、変数及び方程式の数を減少せしめるに到るものであろう。

- x = 遊離している大気中の酸素の全量
- y = 大気中及び海洋中に於ける炭酸ガスの全量
- z = 遊離窒素の全量
- u = 動物体内に於ける該物質の全量
- v = 植物体内に於ける該物質の全量
- s = 地殻に於ける窒素の全量

これらの変数間に於ける諸関係は以下添示した図式（第六図）又は微分方程式によって示す事が出来る。

$$x' = -\alpha_{14}u + (\alpha_{51} - \alpha_{15})v \dots\dots\dots(17)$$

$$y' = \alpha_{42}u - (\alpha_{25} - \alpha_{52})v \dots\dots\dots(18)$$

$$z' = -\alpha_{35}v - \epsilon \dots\dots\dots(19)$$

$$u' = -(\alpha_{42} + \alpha_{46} - \alpha_{14})u + \beta uv \dots\dots\dots(20)$$

$$v' = (\alpha_{15} - \alpha_{51} + \alpha_{25} - \alpha_{52} + \alpha_{35} - \alpha_{56})v - \beta uv \dots\dots\dots(21)$$

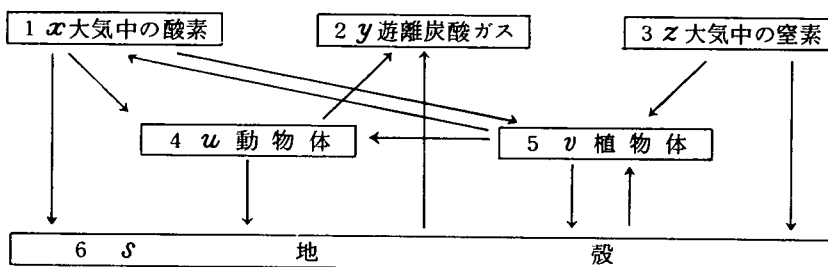
$$s' = \alpha_{35}u + (\alpha_{45} - \alpha_{65})v + \epsilon \dots\dots\dots(22)$$

これらの方程式の作成は前節のそれと同様である。前と同様に植物が存在しない時は動物の生活の平均化は破れて減少し、次式の如くなるであろう。

$$\lambda = \alpha_{42} + \alpha_{46} - \alpha_{14} > 0$$

同様に $u = \alpha_{15} - \alpha_{51} + \alpha_{25} - \alpha_{52} + \alpha_{35} - \alpha_{56} > 0$

第六図 大気中の循環



これらの環境下に於いては、(17)式より(22)式までが与える結果は前節に述べた処のものと同じものである。変数zは常に減少し、(20)及び(21)式は又、週期的解答を有する大気中のガスに関する方程式を附加すれば次の如くである。

$$x' + y' + z' = u(\alpha_{42} - \alpha_{14}) - (\alpha_{15} - \alpha_{51} + \alpha_{25} - \alpha_{52} + \alpha_{35})v - \epsilon$$

tよりt+wまで本方程式をtに関して積分すれば大気中の平均消失率を得る。

$$\frac{x(t+w) + y(t+w) + z(t+w) - x(t) - y(t) - z(t)}{w} = -\frac{\lambda\alpha_{56} + \mu\alpha_{46}}{\beta} - \epsilon < 0$$

訳註； 本式の左辺は前訳註に述べた如く平均値の定理よりこれを書き換えたもので右辺は次の如くして得られたものである。

$$\begin{aligned} \text{即ち} \quad \lambda &= \alpha_{42} + \alpha_{46} - \alpha_{14} \quad \text{より} \\ \therefore \alpha_{42} - \alpha_{14} &= \lambda - \alpha_{46} \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \mu &= \alpha_{15} - \alpha_{51} + \alpha_{25} - \alpha_{52} + \alpha_{35} - \alpha_{56} \quad \text{より} \\ \therefore \alpha_{15} - \alpha_{51} + \alpha_{25} - \alpha_{52} + \alpha_{35} &= \mu + \alpha_{56} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

(1)(2)式を原式の右辺に代入し、又 u 及び v は前節(1)式より

$$\frac{1}{w} \int_0^w u dt = \frac{\mu}{\beta} \quad \frac{1}{w} \int_0^w v dt = \frac{\lambda}{\beta}$$

故に原式の右辺は次の如く行って計算する事が出来る。

$$\begin{aligned} & u (\alpha_{42} - \alpha_{14}) - (\alpha_{15} - \alpha_{51} + \alpha_{25} - \alpha_{52} + \alpha_{35}) v - \epsilon \\ &= \frac{\mu}{\beta} (\lambda - \alpha_{46}) - \frac{\lambda}{\beta} (\mu + \alpha_{56}) - \epsilon \\ &= \frac{\mu \lambda - \mu \alpha_{46} - \lambda \mu - \lambda \alpha_{56}}{\beta} - \epsilon \\ &= -\frac{\lambda \alpha_{56} + \mu \alpha_{46}}{\beta} - \epsilon \end{aligned}$$

故に大気、及び之に含まれる窒素は、連続的に消失しつつあるものである。この消失の最大速度は、簡単なる思考によって評価せられ得る。即ち大気中の窒素の総量は 4×10^{15} 仏噸のもので、地殻は少くとも、その上層に於いては、同じ単位的大量を含むものである。仮りに、この化合窒素を以って、大気に於ける起源のものであるとし、斯る過程の存続、 2×10^9 年間とすれば、大気中の窒素の年額損失量は、 2×10^6 仏噸を越えるものではなく、斯る算定によって、大気中窒素は 20 億年経過するの でなければ消尽せられるものではないと言う事が分るであろう。

第四章 人口増加：ロジスティック法則

本章に於いては、封鎖集団の増加に関して考察しよう。この集団は密接に Verhulst の法則に従うもので、実験、観察、何れより見ても確認される事実である。

1. 封鎖人口に対する微分方程式

我々は第一章に於いて次の微分方程式を得たのであった。即ち

$$p'(t) = \epsilon p(t) - h p^2(t) + I - E \dots\dots\dots(1)$$

但し ϵ は増加係数、 h は極限係数、 I は移入係数、 E は移出係数である。
増加係数 ϵ は出生率 n と死亡率 m の差である。

$$\therefore \epsilon = n - m$$

然るに、封鎖集団に於いては移入も移出も共に無いのであるから(1)式は単純化される。

即ち
$$p'(t) = \epsilon p(t) - h p^2(t) \dots\dots\dots(2)$$

本形式は数理論式として知られているものである。係数 h は漸次に若干、 ϵ に比例するもので、 $p(t)$ が十分に小なる時は、 $p^2(t)$ は無視されてよいものである。これが人口理論に於ける Malthus の形式を与えるものなのである。即ち

$$p'(t) = \epsilon p(t) \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore p(t) = p(0) e^{\epsilon t} \dots\dots\dots(4)$$

訳註； $p'(t) = \epsilon p(t)$

$$\therefore \frac{p'(t)}{p(t)} = \epsilon$$

$$\int \frac{p'(t)}{p(t)} = \int \epsilon$$

$$\log p(t) = \epsilon t + \epsilon_1$$

初期条件 $t = 0$ の時は $\epsilon_1 = \log p(0)$

$$\therefore \log p(t) = \epsilon t + \log p(0)$$

$$\therefore p(t) = p(0) e^{\epsilon t}$$

我々は本法則によって、指数増加を行う多くの生物学的事例を与え得るのである。即ち生活を営むに必要な物が十分豊富であって各個体間に於いては闘争が廃止せしめられるに到る様な時は必ずこの様な現象が起るものである。即ち処女地へ植民した様な場合、長い間その隣人を見る事がない様な広大な地域に住居している植民者にこの事例を見るのである。人口増加に伴って、制限すると言った意識が生じて、極限項を考慮しなければならぬ様な事に到るものである。

— 実 例 —

以下は最適の条件下に於いては長い間、多産力が維持されるものである事を示した好適例である。即ち齧歯類小動物 *Microtus arvalis* Pall は大なる速度で増殖するものであるが次表は死亡を除けば一組の雌雄より産出された子の増加を示すものである。

月 数	0	2	4	6	8	10	12	14
p 観 察 数	2	5	16	20	40	112	200	283
p 理 論 数	2	4.5	10	22	50	109	252	282

理論値は $p = e^{0.4t}$ を基としたもので、これら動物の妊娠期間は三週間で更に、調査した時期と子が生れた時期との間にかかりの時間的差が屢々あった事を思えば上表は可能な可成りの密接な一致を示したものである。

— 極限係数に関する注意 —

極限項目を説明するに当って第一章に与えたものと異った別途の説明も出来るのである。集団数の増加は個体間の闘争によって阻害され、しかもこの効果は、単位時間に於ける個体の遭遇数に比例するものと考え事が出来るから、この数は $p^2(t)$ に比例する。よって(2)式の極限項 $-h p^2(t)$ なる形はこれより導入されたのであった。ただ注意すべき事は、本形の極限項目は余りにも単純であって、個体間の遭遇及び闘争何れにも影響のある外的極限要因は何等斟酌されてない事である。本項目にこの形式を与えた事は、これら要因の総量と言う意味であって、数理論法則に於いてはこれを使用する事は正当なものである。又この事は経験によっても、広く確認されている。

— 化学的解説 —

(2)式には称々異った次の如き形式を与える事が出来る。

$$\frac{dp}{dt} = h p (w - p) \quad \text{但し} \quad w = \frac{\epsilon}{h} \dots\dots\dots(5)$$

本形式に於いて、その数理論式の示すものは反作用の過程であって、これが速度は生成されたものの総数 p 及び、誘導抵抗の総量 $(w - p)$ に比例するものである。この解説は人口集団に関する限り、無意義ではあるが、一有機体に於ける反作用には利用されるものである。

2. ロジスティック (数理論) 法則

(5)式を変形して次の如くする。

$$\varepsilon dt = \frac{w dp}{p(w-p)} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{w-p} \right) dp$$

積分すれば $p_0 < w$ なる時次式を得る。

$$\varepsilon t = \log \frac{p(w-p_0)}{(w-p)p_0} \dots\dots\dots(6)$$

訳註； $\varepsilon dt = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{w-p} \right) dp$

$$\varepsilon \int dt = \left(\int \frac{1}{p} + \int \frac{1}{w-p} \right) dp$$

$$\varepsilon t = \log p - \log(w-p) + k$$

$$\varepsilon t = \log \frac{p}{w-p} + \log \frac{w-p_0}{p_0}$$

$$\therefore \varepsilon t = \log \frac{p(w-p_0)}{(w-p)p_0}$$

但し $t_0 = 0$ 積分常数 $k = \log \frac{w-p_0}{p_0}$ とす

又 $p_0 > w$ なる時は

$$\varepsilon t = \log \frac{p(p_0-w)}{(p-w)p_0} \dots\dots\dots(6')$$

これらの公式は集団人口数増加の数理論法則を与える。

$$p = \frac{wp_0}{p_0 + (w-p_0)e^{-\varepsilon t}} \dots\dots\dots(7)$$

$t \rightarrow \infty$ なる時は初期値 p_0 の如何を問わず p の極限は w に等しい。即ち $p_0 < w$ なる時は、 p は増加し、 $p_0 > w$ なる時は減少して、何れも、 w に到るものである。

$p_0 < \frac{w}{2}$ なる時曲線(7)は、 $t = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{w-p_0}{p_0}$ に於いて、彎曲点を通過し、斯る時 $p = \frac{w}{2}$ なる値を

取る。又 $\frac{w}{2} < p_0$ なる時は最大値は存在しない。故に根底的の結論は次の如くである。

“封鎖集団人口の趨勢は単に生活係数に依存する極限へと向うのものであって、初期条件の与える値 p_0 には無関係である。”

以上の結論は、生活係数を決定す可き諸要因の総量なるものが不変のまま存続するものとなす限り

重大なものである。これらの係数が依存しているものは次の如きものであって、即ち居住近傍、その資源、機構的展開の段階、及び集団人口の社会的構成等である。

— アメリカ合衆国 —

本数理論法則を用いて興味のあるものは、

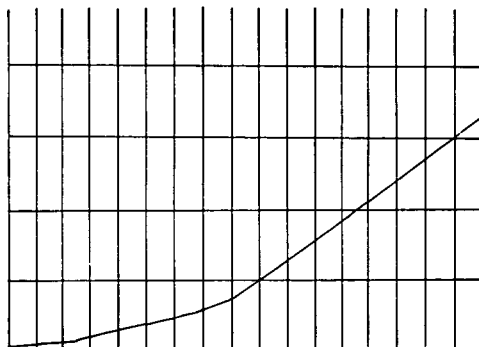
$$p = \frac{197,273,000}{1 + e^{-0.03134(t-1913.25)}} \dots\dots\dots(8)$$

なる式がアメリカ合衆国の人口を密接に示している事である。これは第七図及び次表によって示されている。

年次	p 観察数	p 理論数	年次	p 観察数	p 理論数
1790	3.9×10^6	3.9×10^6	1870	38.7×10^6	39.4×10^6
1800	5.3×10^6	5.3×10^6	1880	50.3×10^6	50.2×10^6
1810	7.2×10^6	7.2×10^6	1890	63.1×10^6	62.8×10^6
1820	9.6×10^6	9.8×10^6	1900	76.1×10^6	76.9×10^6
1830	12.9×10^6	13.1×10^6	1910	92.3×10^6	92.0×10^6
1840	17.1×10^6	17.5×10^6	1920	106.5×10^6	109.4×10^6
1850	23.2×10^6	23.2×10^6	1930	123.2×10^6	123.9×10^6
1860	31.5×10^6	30.4×10^6			

上表は驚異的に観察と理論との一致を示している。アメリカ合衆国は1790年来、五回の大戦争を行い、新領土を獲得して広大なる地域に植民し、圧倒的な工業体制にまで発展し、しかも世界の各地方よりの移民を入国させ、吸収せしめているにも拘らず、数理論法則は、密接に人口増加を示現しているものであると言う事が出来る。又察知される事は加速増加と遅滞増加の境界である彎曲点は、1914年

第七図 数理論人口例
アメリカ合衆国の人口増加



のみに通過されて、しかもその後の飽和状態の存続はなお前途遠遠たるものがあるのである。この時に於いても人口密度は単に一平方軒に付20人宛で、これはヨーロッパに於ける人口の飽和点に比すれば遙に少いのである。

— フランス及びベルギー —

ヨーロッパ諸国に関しては、1845年 Verhulst はフランス及びベルギーの飽和

状態を算出した。ベルギーに対しては、最大人口、6,600,000 フランスに対しては凡そ、40,000,000 と彼は予言したのである。然るに1930年現在ベルギーの人口は8,092,000で、一平方千266人に相当しているものであるが Verhulst の予測は224人であった。この差は、ベルギーに於ける工業の驚異的勃興や及び在外人口を維持するのに十分な加増富源を保証したコンゴ領土の獲得によって説明される事が出来るものである。フランスの現代人口は、外国人を除き Verhulst の予測と驚異的な一致を見たのである。理論的には最大値は殆んど達せられたと言ってよく、この意味する処は、出生率の低下、及び輿論を不安ならしめる様な他の社会的現象を表現しているものである。この事態は植民地の重要性が増大すると共に、首都の分散が速に行われて、一時的に混乱したもので、更にカナダに於けるフランス人人口の急激な増加とフランス本国に於ける緩慢な人口減少とを対比すれば、斯る現象の生物学的経済学的性質を十分に了解するに到るものであろう。

再びアメリカの人口に眼を向けて、新大陸に於ける密度（一平方千20人）とベルギーに於ける既に到達された密度（一平方千266人）とを対比して見よう。この様相が示している事柄は、一つはアメリカに於ける開墾初期の特徴である経済的並びに心理的要因が末だに優勢であるのに反して、ベルギーに於いては、一隅一土と誰も、これは凡て活用されて居るのを見るのである。

(8)式に於いて、諸係数が

$$\epsilon = 0.03134 \quad w = 197,273,000 \quad h = 1.6 \times 10^{-10}$$

であるのはこの事情とこの精神に該当しているものなのである。時機が来れば、何日かはアメリカに於いても、ベルギーと同様に土地を更に完全に活用しなければならない様な現実に来るであろう。この時は生活係数は修正され、(8)式によって決定された1790年より1930年の間に画かれた弓形曲線とは両立しない様な人口曲線が伸展するのを見るであろう。ただ注意すべき事は、斯くの如き観察数及び理論数間に於ける見事な一致は人を眩惑せしめるもので、これ程又当にならぬものはない事である。事実、一連の観察数値は一曲線の全群よりも寧ろ、狭い環帯に等しいものであって、この一環帯に於いてさえ無数の曲線が追跡され得るのである。しかも、これ等の曲線は観察の週期以内では、目下問題としている状態とは極めてよく一致するが、これらの極限を越える時は真に漠然とした分散を示すものであるからである。

— 細菌の集落増殖 —

この社会的実例の後、Lotkaによって採用された生物学的実例を与えよう。これは細菌に関するもので樹枝状桿菌(B dendroides)の集落増殖に関し、G Thorntonによって観察されたものである。本例は次表に掲げてある。

年 月		0	1	2	3	4	5
一平方糎中 占める面積	観 察	0.24	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
	理 論	0.25	2.03	13.08	37.05	47.39	49.02

理論値の計算は次式によったものである。

$$p = \frac{0.2524}{e^{-2.128t} + 0.005125}$$

本例に於いても可成り密接に一致を示している。

Régnier は大腸菌の培養を多く研究して独得な接種を行い、一平方糎に付、500より500,000まで増加せしめたのである。本実験に於いて培養液は取り換えず、蓄積された代謝産物の毒作用は究意に於いて増殖曲線を変形せしめたのであるが、その初期に於いては、細菌の数の如何を問わず、 $\epsilon = 1.12$ なる率を持ち、Malthusの法則(4)と凡ての実験に於いて密接に一致したのである。依って代謝産物の毒作用を論議しようとするればこれらの実験に立ち帰って行わねばならぬ問題である。

3. ロジスティック(数理論)法則の実験的証明

前に述べたアメリカ合衆国の実例は、観察と数理論法則とが驚異的に一致を示したものであるがこの一致は十分なものではない。その理由は、同じ比率を有する一つの曲線によっても増加し、漸近的に一極限に接近し得る様な一数列を表現する事は、常に可能な事であるからである。故に数理論式は更に一般式に置換されなければならないのである。

$$p' = F(p) = \phi(p) - \Psi(p) \dots\dots\dots(9)$$

但し厳密に言えば $\phi(p)$ は人口の増加であって $\Psi(p)$ は極限要因の総量である。そしてこれら要因の作用は本過程の初期に於いては殆んど認知されないが p が十分大になれば、 $\Psi(p)$ の増加単位は $\phi(p)$ より高いものである事はうなづかれるのである。即ち、この時は次の如き不等式が成立する。

$$\phi(p) > \Psi(p) \quad (0 < p < w)$$

$$\phi(p) < \Psi(p) \quad (w < p)$$

従って $p'(w) = \phi(w) - \Psi(w) = F(w) = 0$

$$F'(w) = \phi'(w) - \Psi'(w) < 0$$

訳註； 以上の二式は $w = \frac{\epsilon}{h}$ と言う前に出た飽和人口の函数として見たものであって、 p が大なる時は、増加比率と、極限比率とは大差のない事を示しているものである。更に $F'(w) < 0$ と言うのは、両者比率の度合が後の方が大となって行く事を意味しているものである。イギリス等にその実例を見る事が出来るであろう。

今 $F(p)$ を点 w の近傍に於いてTaylorの定理に依って、展開した時、 $(w-p)$ が小であれば次式を得る事が出来る。

$$F(p) \sim - (w-p) F'(w)$$

$$p' = - (w-p) F'(w)$$

故に $p \simeq w - A e^{F'(w)t} \dots\dots\dots(10)$

同じ条件下に数理論式は次の如くである。

$$p \simeq w - \frac{(w-p_0)w}{p_0} e^{-\varepsilon t} \dots\dots\dots(11)$$

一方、同様に $\phi(p)$ を展開し p を極めて小とすれば、 $\phi \simeq \phi'_0 p + \dots\dots\dots$
 但し、 $\phi_0 = 0$ $\phi'_0 > 0$ 又 $p = 0$ なる時は $\Psi(p)$ は消失するものである。
 故にこの条件の下に於いては p が小なる時(9)式は

$$p' = \phi'_0 p$$

となり、再び Malthus の法則を得るのである。

$$p = p_0 e^{\phi'_0 t} \dots\dots\dots(12)$$

このようにして、他の任意函数 ϕ 及び Ψ に関しては、これら広汎なる仮定の下に、人口増加の増加初期並びに終期は指数法則に従うものである。

これら諸相の連続は極めて容易であって、結局、数理論曲線の S 状型は、無数の理論的曲線に属し、これら凡ては(9)式を満足するものである。又数理論法則の場合では二指数は明らかに一致している

$$\therefore \phi(0) = -F'(w)$$

然し指数の計算が困難である事が屢々あるので本基準は正確なものではない。

増加係数に関しては若干の方法によって、例えば p に比例する人口の一部を規則的に移動すると言う事に依って、之を修正する事が出来るものとすれば(9)式は次の如くなるであろう。

$$p' = \phi(p) - m p - \Psi(p)$$

此の補助死亡率は w を修正せしめる事になるがその方向については不明である。この理由は、函数 ϕ 及び Ψ が未知なる時、 $\phi(p) - m p - \Psi(p) = 0$ の解 Π は、 $\phi(p) - \Psi(p) = 0$ の式の解とは簡単な式ではその関係が示されないからである。

反対に数理論式に於いては、

$$p' = (\varepsilon - m) p - h p^2 \quad \text{で、}$$

人口の修正された最大値は次の如くである。

$$\Pi = \frac{\varepsilon - m}{h} = \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon} w \dots\dots\dots(13)$$

故に、若し、この実験の終りに臨み、新しい最大値 Π が発見されて(13)式に依って前の最大値 w と関連付けられたとすれば、数理論法則をして益々有利ならしめ、其処に有力なる議論が存在する。

本議論はぞうり虫の培養に関する、Gause の数的実験結果について行われたものである。

即ち、代謝産物を除去する場合に、特別な予防方法や規則的に培養液を取換へる事、又は食物を供給する事等に依って、固定状態に達し、更に比較的長期間に亘って、これを維持し得る集落を Gause は獲得したのである。数的調節を計る為 Gause は集落培養液の週期的抽出を行い、三つの関連した実験を行って、変動した端数は、培養液の即ち集落の 0.1, 0.2, 0.3 であった。数理論法則が正確なものとするれば、これら系統の最大値は次の値に等しい筈である。

$$\pi_1 h = \epsilon - 0.1 \quad ; \quad \pi_2 h = \epsilon - 0.2 \quad ; \quad \pi_3 h = \epsilon - 0.3 \quad \dots\dots\dots(14)$$

以上より h と ϵ を消去すれば次の関係式を得る。

$$2\pi_2 = \pi_1 + \pi_3 \quad \dots\dots\dots(15)$$

Gause の得た計算値の平均は次表の如くである。

ぞうり虫	π_1	π_2	π_3
Paramecium aurelia	475	375	305
Paramecium bursaria	340	240	190

これは密接に(15)式を立証しているものである。数理論法則に於いて、この事柄が確立した事は前述した理論曲線(2)と経験曲線(8)とが一致すると言う事よりも更に重要な事である。(2)式に於ける極限項は増加項 ϵp と同様に宜く表現されている。

第五章 集団と環境

本章に於いて攻究しようとする処は、甚しく変動する要因を考慮に入れた場合集団人口が如何に増加するかと言う事である。即ち変動要因と言うのは、例えば、食物、利用面積、移入、移出、流行病、錯綜状態及び副作用等である。

1. 単一ならざる集団

$$p'(t) = \epsilon p(t) - h p^2(t) + I - E \dots\dots\dots (1)$$

の考察から始める。

色々と予想せられる若干の原因には、移入を招来するものや又は反発するもの等があって、人口に関する限り、一国の勃興によって惹起される各種の移住現象が存在している。反対に、人口増加と共に進んで国外移住を願うものや処女地を求めるもの等があり、動物集団に於いては、常に食料不足によって大移動は促進されている。捕食動物は特に移動性がある、食料の豊富な地域を求めるものである。これら二つの趨勢は交互に行われて、週期的、或は週期態的の局部変動を惹起させる。これらの二大流れの総和を次の多項式で示そう。

$$I - E = v_0 + v_1 p + v_2 p^2 \dots\dots\dots (2)$$

本式に於ける係数 v_0, v_1, v_2 は正又は負の常数である。(1)式は斯る時次の如くなるであろう。

$$p' = v_0 + (\epsilon + v_1) p - (h - v_2) p^2 \dots\dots\dots (3)$$

(2)式を構成している各項は特別な新工夫によって見出されたものではない。即ち v_0 項は境界を通過する流れが一定数である事を示し、 $v_1 p$ 項は正逆何れかの集団動態、若しくは、細菌培養による規則的回収等を意味し、 $v_2 p^2$ 項は、捕食動物その他のものが突然に移住する等と言う事に関するものである。以下、特殊な若干例を考察してみよう。

— 不都合な悪例 —

本例は $v_0 < 0$ $\epsilon + v_1 < 0$ $h - v_2 > 0$ 即ち $p'(t)$ は常に負で $p(t)$ は減少の一途を辿り、0 に近づくと言う様な場合である。

— 好都合なる善例 —

$v_0 > 0$ 、 $h - v_2 > 0$ とすれば、多項式 $v_0 + (\epsilon + v_1) p - (h - v_2) p^2$ は関係のない負の値か又は w によって示される事ができる正の値かを有し、次に $p_0 < w$ なる時は導函数 $p'(t)$ は常に正で、集団 $p(t)$ は増加し、究意 w に向い、又 $p_0 > w$ なる時は、 $p'(t)$ は常に負となって、 $p(t)$ は減少し、同じ極限 w に向うものである。

— 無制限移入例 —

$v_0 > 0$ $\epsilon + v_1 > 0$ $h - v_2 < 0$ とする。

斯る場合、集団人口数は理論的に、連続増加し無限大に向うものであるが、事實は、例外的な環境に於いては単に $v_2 p^2$ 項だけが現われ、移入現象は決して長く続くものではないのである。

— 阻害要因例 —

一定の主流 v_0 は負であるが、その近傍より吸収する量が相当大で、 $\epsilon + v_1 > 0$ なる時は、二つの結果が示されるに到るであろう。即ち

$$(\alpha) \quad (\epsilon + v_1)^2 + 4 v_0 (h - v_2) < 0$$

$p^1(t)$ は常に負で、 $p(t)$ は 0 に向う。

$$(\beta) \quad (\epsilon + v_1)^2 + 4 v_0 (h - v_2) > 0$$

多項式 $v_0 + (\epsilon + v_1) p - h p^2$ は二つの正極限 w を有し、 $w_2 > w_1$ とする。即ち $p_0 < w_1$ なる時は、 $p^1(t)$ は常に負で、 $p(t)$ は 0 に向い、 $w_1 < p_0 < w_2$ なる時は $p^1(t)$ は常に正で、 $p(t)$ は増加し w_2 に向う。 $p_0 > w_2$ であれば $p^1(t)$ は常に負で、 $p(t)$ は減少して w_2 に向う。故にこの場合集団人口の最終は初期の値 p_0 如何に依存しているが二つの究竟極限值 0 及び w_2 は p_0 に依存しないのである。 w_2 に関しては不安定的の状態にあると言うことが出来る。本質的に以上の四例と異なる他の例もあるであろうがここでは以上に止めたい。

訳注：本例に於いて、取扱っている推論概念は専ら数学的方法論を以て行っているのである。即ち、

(3) 式の右辺は二次方程式であるから今、

$$v_0 + (\epsilon + v_1) p - (h - v_2) p^2 = -A p^2 + B p + C$$

とする事が出来る。即ち(2)(β)で述べている事はこの式の判別式を考えているのである。即ち判別式が負なる時はこの式の正負は p^2 の係数の符号と一致する。即ち $A > 0$ なるより、 $-A < 0$ で本式は負である。∴ $p' < 0$ 判別式が正なる時は二つの実根を有すると言う事から、これを w_1, w_2 としたのである。即ち本式を次の如く書き直す事が出来る。

$$F(p) = -(p - w_1)(p - w_2) \quad (w_2 > w_1)$$

依って $p_0 < w_1$ の時は

$$F(p) = -(p_0 - w_1)(p_0 - w_2) < 0$$

$$w_1 < p_0 < w_2 \quad F(p_0) > 0$$

$$p_0 > w_2 \quad F(p_0) < 0$$

を得るのである。

2. 一同種集団に於ける周期的変動

断続要因が同種集団に作用する時は既述した様な典型的な数理論式では表現され得ない周期的変動が起るものである。即ち或る密度に到達した一集団が流行病の犠牲となり、この流行病は、その伝播が不可能になる様な集団密度に集団が低下する時に限り、停止するものである。或はその他の原因で、同様な結果を招来するものもある。例えば大都会へ集中したものが交互に再び田舎へ帰郷すると言った様な場合である。我々は斯る種類の集団人口の展開を考察するのに、次の仮定をおく。即ち初期に於いては次の数理論法則によって支配されるとし、

$$p' = \epsilon p - h p^2 \dots \dots \dots (4)$$

p がある値 Q に到達した時、流行病が現われるとすれば、 $Q < w = \frac{\epsilon}{h}$ で本段階では、生活係数は

$E < \epsilon$, $H > h$ となり, (4)式は次式によって置換される。

$$p^1 = E p - H p^2 \dots\dots\dots(5)$$

但し, $Q > \frac{E}{H}$ とすれば, 集団人口は減少する。そして, 密度がある限界下に低下して, 流行病の蔓延が終止する様な一点に到るのである。 q をこれに相当する p の値とすれば, $q > \frac{E}{H}$ である。斯る時期に流行病は終息し, 集団人口は再び(4)式に従って増加し始め, 終に新しい流行病の勃発にまで上昇するものである。このようにして, q Q 間に p の周期的振動が存在し, これら振動の周期 Ω は計算される事が出来る。

本循環の初期に於いて, $p_0 = q$ なる場合は第四章公式(6)を用いて, 次式を得る。

$$t - t_0 = \frac{1}{\epsilon} \log \frac{p(\epsilon - h q)}{q(\epsilon - h p)}$$

故に循環初期に要する時間は次の如くである。

$$T_1 = t_1 - t_0 = \frac{1}{\epsilon} \log \frac{Q(\epsilon - h q)}{q(\epsilon - h Q)} \dots\dots\dots(6)$$

同様に循環第二期に於いても, E が正であれば次式を得る。

$$t - t_1 = \frac{1}{E} \log \frac{P(QH - E)}{Q(HP - E)}$$

∴ 終極点に対しては

$$T_2 = t_2 - t_1 = \frac{1}{E} \log \frac{q(QH - E)}{Q(Hq - E)} \dots\dots\dots(7)$$

を得る。全周期は次式に等しいものである。

$$\Omega = \frac{1}{\epsilon} \log \frac{Q(\epsilon - h q)}{(\epsilon - h Q) q} + \frac{1}{E} \log \frac{q(HQ - E)}{Q(Hq - E)} \dots\dots\dots(8)$$

本式は二相間の生物学的過程に関しては厳密に言って正確でない事は勿論で, 若干の訂正を要するが, 減衰周期の形成機構に関しては, 合理的に, 正しい図線を示すものである。斯る周期型は不正確ではあるが, 屢々存するもので, 典型的振動, 例えば弾性体の振動と対照を示すものである。事実, 後者は前者の単に特別なる場合に過ぎない。減衰振動は標準振動よりも一般には屢々起るもので, 秩序の維持, 及び混沌状態の調整等は大きい, これらのものに原因が求められなければならないのである。

齧歯類小動物の大群が突然に出現し, しかも比較的これらの小動物群の消滅する事が速やかでない様な場合は, 以上の方法によって解明される。本現象は, ある場合には9年乃至11年他の場合には3.5年乃至4年の週期を以て, 不規則的な週期性を示すものである。ある学者は, この週期性を太陽の黒点作用に起因するとしているが, 純粹に土地の説明や, 及び地方的要因等によって, これを十分に解明されるから, 以上の解釈は不必要である。然らば, これらの要因を考えるのに, 先ずKalabuchow, 並びにSewertzoff等の観察に依れば, 重大なる要因は, 流行病が出現し蔓延して消滅する場合では, 動物集団の密度が問題である事を示している。更に, 地方的に密度が増加する事は, 大量に捕食動物を吸引するものである。これら二要因は二, 三週間, その集団の97~98%を破壊せしめ, そして, 病勢の伝播が不可能な水準にまで密度は低下する。かくして最小量の2%まで縮減された集団は十分なる避難所, 及び豊富なる食料を確保するもので, この新しい条件の下に於いては再び緩慢に, 有利な数的増加が行なわれる。数年後, 再び別な疫病が出現するのに好都合な事態を形成するものでもある。これらの条件は決して厳密には数字に表現する事は勿論出来ないが, 変動は周期的のものでなく周期態的のものである。

廿日鼠の再生速度は頗る大である為、循環初期に於いては、極限要因は無視され、 $h=0$ となす事が出来る。循環第二期に於いては、逆に、EはHに比し、甚だ小で無視される。こうして、公式(6)~(8)は次の如く単純化される事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{Q}{q} \\ T_2 &= \frac{Q-q}{Q q H} \\ \Omega &= \frac{1}{q} \log \frac{Q}{q} + \frac{Q-q}{Q q H} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

訳註： T_1 は(6)式に於いて、 $h=0$ と置けば得られるが、 T_2 は原式に於いてEを無視し、次の如く行ったものである。即ち(5)式に於いて、 $E=0$ と置けば、

$$\begin{aligned} p' &= -H p^2 \\ \frac{dp}{dt} &= -H p^2 \\ -\frac{dp}{H p^2} &= dt \\ \therefore dt &= -\frac{1}{H} p^{-2} dp \\ \text{積分すれば、} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_Q^q -\frac{1}{H} p^{-2} dp \\ \therefore t_2 - t_1 &= \frac{1}{H} \left[\frac{1}{p} \right]_Q^q = \frac{1}{H q} - \frac{1}{Q H} \\ \therefore T_2 = t_2 - t_1 &= \frac{Q-q}{Q q H} \end{aligned}$$

これらの諸式により、生活係数は、 $Q p T_1 T_2$ の値が既知なる時は次式から計算せられる事が出来る。

$$\varepsilon = \frac{1}{T_1} \log \frac{Q}{q} \quad H = \frac{Q-q}{Q q T_2} \dots\dots\dots(10)$$

廿日鼠の場合には、 $T_1 \sim 4$ 年、 $\frac{Q}{q} \sim 50$ 、 $\log \frac{Q}{q} \sim 4$ であるから、 $\varepsilon \sim 1$ となる。

自然環境下に於いてはこの ε の値は廿日鼠の増殖率と頗るよく一致するものである。

3. 代謝産物により損害を受ける単一集団及び残存作用

ある系統の存続状態は単に該変数の初期の値に依存するばかりでなく、全経歴にも依存する事が屢屢ある。植物体の共同生活に於いては、一種属が屢々、窒素化合物を累積する事に依って他の種属に対して、土壤を耕している事がある。数学的見解よりすれば、斯る肥沃性は生物学的方程式に於いては、補助積分項によって示されるものである。動物集団では代謝産物の累積は、全集団、又は若干の集団員に重大な不利益を齎すものであって、出生率の低下、死亡率の増加によって示される。

Volterra の行った如く、出生死亡の両率に関する全毒作用が、数理論式の積分項で示されるとすれば、我々は次の微積分方程式を得る事が出来るであろう。

$$p'(t) = \epsilon p(t) - h p^2(t) - c p(t) \int_0^t K(t-\tau) p(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots(10)$$

この残存作用 $K(t-\tau)$ の函数は減少して行く作用のもので、一般に、 $K(0)=1$ と書く事が出来る。或る時期 T の終りに、残存作用の効果が消失する時は、 $K(t)=0, t > T$ で、

$$p'(t) = \epsilon p(t) - h p^2(t) - c p(t) \int_{t-T}^t K(t-\tau) p(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots(11)$$

一方、又残存作用は弱まるが無限に持続する様な場合もある。即ち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \sigma < 1$$

— 単純化 —

(10)式は一般形では積分不可能である為にこれを単純化し、 $K(t-\tau) = 1$ と置く …(12)
この時本式は次の如くなる。

$$p'(t) = \epsilon p(t) - h p^2(t) - c p(t) P(t) \quad \dots\dots\dots(13)$$

但し $P(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots(14)$

$$\therefore p(t) = P'(t) \quad p'(t) = P''(t)$$

故に、(13)式は次の如くなる。

$$P'' = \epsilon P' - h P'^2 - c P P' \quad \dots\dots\dots(15)$$

— 積分 —

斯の式は積分可能である。今、これに e^{hP} を乗じ、次の如く記する事が出来る。

$$\frac{d}{dt} [e^{hP} P'] = \frac{d}{dt} [e^{hP} (\frac{\epsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h} P)]$$

積分すれば

$$P_0 - \frac{q}{h} - \frac{c}{h^2} = e^{hP} [p' + \frac{c}{h} P - \frac{\epsilon}{h} - \frac{c}{h^2}] \quad \dots\dots\dots(16)$$

訳註： $P'' = \epsilon P' - h P'^2 - c P P'$

$$\therefore h P'^2 + P'' = \epsilon P' + \frac{c}{h} P' - c P P' - \frac{c}{h} P'$$

e^{hP} を両辺に乗ずれば

$$e^{hP} h P'^2 + e^{hP} P'' = e^{hP} h P' (\frac{\epsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h} P) + e^{hP} (-\frac{c}{h} P')$$

$$\therefore \int e^{hP} P' = \int e^{hP} (\frac{\epsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h} P)$$

$$\therefore e^{hP} P' = e^{hP} (\frac{\epsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h} P) + K$$

K は積分常数であるから初期 $t_0 = 0$ の時の値を計算すれば、

$$K = \frac{c}{h} P(0) - \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2}$$

$\frac{c}{h} P(0) = p_0$ とすれば、上式は次の如くなり本式(16)を得る。

$$\therefore e^{hp} p' = e^{hp} \left(\frac{\varepsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h} P \right) + p_0 - \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2}$$

$$\therefore p_0 - \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} = e^{hp} \left[P' + \frac{c}{h} P - \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \right]$$

これより(13)式の解を媒介変数型によって得る事が出来る。

$$p = \left(p_0 - \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \right) e^{-hp} + \frac{\varepsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h} P = F(P) \dots\dots\dots(17)$$

$$t = \int_0^P \frac{dS}{F(S)} \dots\dots\dots(18)$$

これらの方程式は集団 p 及び時間 t を、媒介変数 P の函数として与えたものである。

— 本解答理論 —

p は負ではあり得ない事から、(17)式の右辺は、 P_∞ と呼び得る様な P の有限値に対して消失する。 $t = \infty$ なる時、この値は到達され、極めて長期間の終りに、集団は消失する事を意味する。更に、 $P_0 < \frac{\varepsilon}{h} = w$ とすれば p は t が十分小なる値であっても、増加する。このためある有限時に於いて到達される集団の最大値がある。今 P_m をこの最大値、 t_m を時間とすれば容易に次の如くなり得るであらう。

$$P_m = \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \log \frac{c + \varepsilon h - p_0 h^2}{c} < \frac{\varepsilon}{h} \dots\dots\dots(19)$$

$$P_m = \frac{1}{h} \log \frac{c + q h - p_0 h^2}{c} \dots\dots\dots(20)$$

訳註：(17)式を P に就いて微分する。

$$p' = -h \left(p_0 - \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \right) e^{-hPm} - \frac{c}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{c + h \varepsilon - h^2 p_0}{h} e^{-hPm} = \frac{c}{h}$$

$$\therefore e^{-hPm} = \frac{c}{c + h \varepsilon - h^2 p_0}$$

$$\therefore P_m = \frac{1}{h} \log \frac{c + h \varepsilon - h^2 p_0}{c} \quad \text{即ち(20)を得る。}$$

これを(17)式に代入すれば p_m を得る事が出来る。

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{h^2 p_0 - h q - c}{h^2} \cdot \frac{c}{c + h q - h^2 p_0} + \frac{\varepsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h^2} \log \frac{c + h q - h^2 p_0}{c} \\ &= -\frac{c}{h^2} + \frac{\varepsilon}{h} + \frac{c}{h^2} - \frac{c}{h^2} \log \frac{c + h q - h^2 p_0}{c} \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \log \frac{c + h q - p_0 h^2}{c} < \frac{\varepsilon}{h} \quad \text{故に(19式)を得る。}$$

P に対してこの値を(18式)に代入置換すれば t_m を得る。この最大値通過後、 p は 0 に向う。区間 (t_m, ∞) に於いて常に彎曲点がある

$$p_0 < \frac{3}{4} w + \frac{c}{4 h^2} - \frac{1}{4} \sqrt{w^2 + 6 w \frac{c}{h^2} + \frac{c^2}{h^4}}$$

である場合には、 $(0, t_m)$ 区間に於いてなお一つの彎曲点がある。

終局する処、 $p_0 > w$ なる時は何等最大値はなく、 $p'(t)$ は常に負で、集団は 0 に向う。
 故に、凡ゆる場合を通じ、代謝産物の蓄積は集団人口にとって致命的なものである。

— 近似式 —

(17), (18式) は便宜なる形式でないから、厳密には正確なものではない。よって、今、充分に経験曲線を示し得る近似式を以て代用してみよう。 c は h に比して小なるものとすれば、 $t < t_m$ なる時、 p_m により w を置換して、数理論式(7)によって、 p を計算する事が出来る。即ち

$$p = \frac{p_0 p_m}{p_0 + (p_m - p_0) e^{-\varepsilon t}} \quad (t < t_m)$$

$t > t_m$ なる時(18式)は次の如くである。

$$t - t_m = h^2 \int_{P_m}^P \frac{ds}{\varepsilon h + c - c h s - c e^{-h(s-P_m)}} \quad (21)$$

これは(20式)を用いて得られたものである。更に $e^{-h(s-P_m)}$ を、その展開式によって置換する事が出来る。

$$e^{-h(s-P_m)} = 1 - h(s-P_m) + \frac{h^2}{2}(s-P_m)^2 + \dots$$

更に、
$$P_m = \frac{\varepsilon - h p_m}{c}$$

(21)式は次の如くなる。

$$t - t_m = \frac{2}{c} \int_0^{P-P_m} \frac{ds}{\gamma^2 - s^2} \quad \text{但し、} 2 p_m = c r^2$$

積分して
$$t - t_m = \frac{1}{c} \log \frac{\gamma + P - P_m}{\gamma - P + P_m}$$

故に
$$P - P_m = \gamma t h \frac{c(t - t_m)}{2} \quad (22)$$

$$p = \frac{p_m}{c h^2 c \frac{(t - t_m)}{2}} \quad (t > t_m) \quad (23)$$

注意すべき事は、 $h = 0$ なる時、本式は初期時より、集団人口 p の増加を正確に示す事である。

☆訳註

— Régnier の実験集団例 —

これら以上の結果は、後章にて更に論及されているが、J. Régnier の観察に適用されるものであ

る。彼は、新しく取換える事なしに、栄養培液によって大腸菌、及び葡萄状球菌を培養した。集落は、増加し、最大に達し、そして終に消失したのである。

☆訳註：(2)式は双曲函数の形で示したものである。

$$t - t_m = \frac{1}{c} \log \frac{\gamma + P - P_m}{\gamma - P + P_m}$$

$P - P_m = s$ とおいて上式を変形すれば次の如くである。

$$c(t - t_m) = \log \frac{\gamma + s}{\gamma - s}$$

$$\therefore \frac{\gamma + s}{\gamma - s} = e^{c(t - t_m)}$$

$$\therefore s = \gamma \frac{e^{c(t - t_m)} - 1}{e^{c(t - t_m)} + 1}$$

然るに双曲函数は次の式で定義せられている。

$$\sin h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tan h x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

依って分母分子に e^x を乗ずれば

$$\tan h x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

本式では

$$e^{2x} = e^{c(t - t_m)}$$

$$\therefore x = \frac{c(t - t_m)}{2}$$

故に $P - P_m = \gamma \tan h \frac{c(t - t_m)}{2}$ を得る。

本文では $\tan h$ を略して $t h$ と書いているものである。

又、(2)式は $t h$ の微分で示される。即ち、 $\tan h x$ の微分は $\frac{1}{\cos h^2 x}$ である。

故に(4)式より本式を得るのである。

その減少、及び終極の死滅を説明するに当って、三つの仮定を選ぶ事が出来る。即ち、(1) 食料の欠乏、(2) 空地の欠乏、(3) 代謝産物によ培液の毒作用等である。これ等の三要因はその方法に於いて異なるが、終局する処は集落の全滅を招来するものである。特に第三要因(3)は他の要因より可能性がある。我々の関心はこれが立証をここで求め様とする事である。しかし残念な事は、この細菌数の計算は大きな誤差を含むものであるから、その結果については正確を期し難いのである。

大腸菌に関する係数は $\epsilon = 1.14$ と決定されている。故に他の係数を今求めなければならない。次表は理論、及び実験の結果が与えたものである。

単位時間の集落年齢	単位百万の集落数	
	観 察 値	理 論 値
0	0.5	0.5
2	7.3	4.9
4	39.8	47.3
6	380	417.
8	802	2126
24	2178	3980
30	3992	3992
48	3574	3830
96	2650	2354
192	354	367

上表より、 $p_m = 3992$ 、 $t_m = 30$ 時間である。

(23)式より、 $t = 192$ なる時は次式を得る。

$$c h 81 c = \frac{3992}{\sqrt{354}} = 3.36$$

故に $c = 0.023$

(19)式より $h < 0.0003$ である。

以上 p の理論値は、その初期、及び終期に於いて観察値とよく一致するが、8乃至24時間では、密接でない。同様な事柄は葡萄状球菌に関しても見出されるのである。

年 齢 (時間)		0	2	4	6	8	24	30	48	96	192
集 落	観察値(百万)	0.5	6.9	32.4	232	628	3049	5366	4029	2285	290
	理論値(百万)	0.5	4.1	33.2	260	1569	5300	5366	5071	2810	290

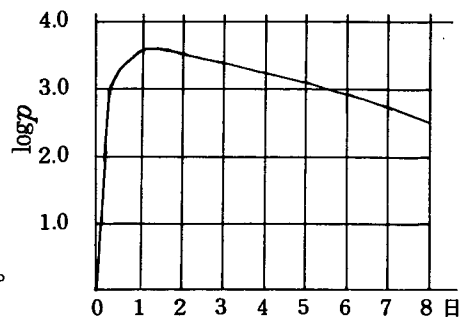
本表の観察値は、同一条件下に於いて施行した四回の実験結果の平均値である。此等平均値の周辺に於ける発散度は極めて大であった。理論値は次の媒介変数を以て計算したものである。

$$p_m = 5366, t_m = 30, \epsilon = 1.05, c = 0.0265, h < 0.0002$$

以上の結果が不完全性を有しているにも拘らず、具味のある若干の事柄が述べ得られる。先ず麻酔係数 c が殆んど同値を示している事は、二種属の化学的要因に対する反応作用が殆んど一致している事を示しているものである。極限係数は、麻酔係数 c に比して極めて小で、大腸菌の h は葡萄状球菌のより高い事である。

増加係数 ϵ は二種属に関して殆んど一致している。結局、二種属に関して8乃至24時間の区間は数理論法則よりも大なる偏差を与え、何れの場合に於いても、同符号を示している。斯る偏差は、既述した他の二つの要因の効果にその原因は帰せられる可きものである。

第八図 葡萄状球菌集落



第六章 集団と環境（続）

数理論型、又は更に一般型（第四章(9)式）の微分方程式は一つの重大なる欠陥を有している即ち、集団増加について、食料供給の根源、或は、占有空間と言うものが考慮されない事である。比等の要因は色々に働き、屢々、予想外の作用をする。今、若干重要な場合を考慮して見よう。

1. 他種属を捕食する一集団

植物、又は他の動物を食する動物種を想像して見る。 u を捕食者の総数又は全量とし、 v を同集団に於ける餌食者の全量とする。稠密でない集団に関する本問題は既に考慮されたから、更に一般的なる場合について考えよう。即ち次のような系統式によって、捕食側と餌食側との間の関係は示され得る。

$$\left. \begin{aligned} v' &= \varepsilon_1 v - h_{11} v^2 - h_{12} u v \\ u' &= -\varepsilon_2 u + h_{21} u v - h_{22} u^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

本式に関する完全な考慮は第九章に記載してあるから、ここでは、この方程式とその解答、及び特に捕食者側の観点より、二・三の注意を述べるに止める。先づ(1)式の示しているものは餌食者に対する食料の豊富である事で、もしそうでなければ、第三式の導入が必要である（第九章参照）。次に二集団の混合構造を有しているものは、例えば、変態を行うような動物の場合の如く、結論を導き出すのに大なる注意を要するものがある。即ち、生活係数を修正すれば十分な場合もあり、又、捕食様態が幼虫と成虫とでは異なる様な時は成虫にとって食料の貧困が致命的となっても幼虫にとっては何等重大とならないような場合もあるのである。この時は該種属は二つ以上の群へと分割させられる。(1)式に関してその解答は二つの型を持ち得る。一つは捕食者に都合良く、他はその反対の時である。第一の場合に於いては、 $\varepsilon_2 h_{11} < \varepsilon_1 h_{21}$ である。この不等式は、若干の方法によって説明され得る。この場合に於いては何れも、捕食者側に好都合で、而も餌食者側にとっても不都合とならない事がある。即ち終局に於いて平衡の可能性が出てくる。極限係数 h_{11} 、 h_{22} を充分小さいものとすれば、本系は、時には周期的現象を帯びた減衰変動を通過して、極限状態に向うものである。第二の場合に於いては逆に $\varepsilon_2 h_{11} > \varepsilon_1 h_{21}$ なる不等式が満足され、捕食者にとって、完全に不利なる場合である。その極限に於いては、次の如くなる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = 0 \qquad \lim v = \frac{\varepsilon_1}{h_{11}}$$

この場合に注意しなければならない事は特別な逆説の生ずる事である。屢々、その初期に於いて、食料供給 v が次のような不等式を満足させる時である。

$$u'_0 = u_0 (-\varepsilon_2 + h_{21} v_0 - h_{22} u_0) > 0$$

この時、 u は増加し始め、最大を通過し、0に到る。餌食者を認識しないで、常に捕食者側のみを眺める観察者にとっては、この最大を通過し、終には全滅に到る一集団の場合の解釈は極めて困難であらう。

2. 食料豊富な一集団

食料供給 v が豊富で、単位時間に於ける $h_{12}uv$ の損失量は、殆んど認知されないと言ふ様な場合を考えて見る。即ち(1)式の第一番式は数理論形式を取る。 $v' = v(\epsilon_1 - h_{11}v)$

$$\text{故に } v(t) = \frac{v_0 w_1}{v_0 + (w_1 - v_0) e^{-\epsilon_1 t}} \quad \text{但し } w_1 = \frac{\epsilon_1}{h_{11}} \dots \dots \dots (2)$$

若し種属 u の増加が v の増加の殆んど止んだ時に始まったものとするれば、(1)式の第二番式に於いて、 w_1 によって v は代用され、数理論式は再び捕食者にとって、数式となる。 $u' = u(\epsilon_2 - h_{22}u)$
 この場合、増加係数 ϵ_2 は次式に等しい。

$$\epsilon_2 = h_{21}w_1 - \epsilon_2$$

ϵ_2 が正であれば、捕食者の増加は正常に発展するであろう。“本例は、一種属の増加係数が複雑な構成、及び外的環境等に依存している事を示すものである。”

若し、一方 v の増加が完全でない時は、(2)式は(1)の第二式に導入せられる可きである。
 本方程式の解答は

$$u = \frac{u_0 \left[1 + \frac{h_{11}v_0}{\epsilon_1} (e^{\epsilon_1 t} - 1) \right]^{\frac{h_{21}}{h_{11}}} e^{-\epsilon_2 t}}{1 + h_{22}u_0 \int_0^t \left[1 + \frac{h_{11}v_0}{\epsilon_1} (e^{\epsilon_1 s} - 1) \right]^{\frac{h_{21}}{h_{11}}} e^{-\epsilon_2 s} ds} \dots \dots \dots (3)$$

で、数理論法則より更に複雑であるけれども $\epsilon_2 h_{11} < \epsilon_1 h_{21}$ の時は、同じ性質を有し、 u は次式の如き極限に向うものである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = \frac{\epsilon_1 h_{21} - \epsilon_2 h_{11}}{h_{11} h_{22}}$$

反対の場合は u は 0 に向う。

3. 更新されざる一定食料の集団

この場合は、自然界、及び人類社会に於いて極めて共通に起り得るもので、(1)系式は次の如き形式を取るものである。

$$\left. \begin{aligned} v' &= u(-\epsilon_2 + h_{21}v - h_{22}u) \\ v' &= -h_{12}uv \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

本式は容易に積分される事が出来る。

$$u = \int_0^t u(s) ds \quad \text{とすれば}$$

(4)の第二式より $v = v_0 e^{-h_{12}u}$ を得る。これより第一式は次の如く書く事が出来る。

$$u' = u(-\epsilon_2 + h_{21}v_0 e^{-h_{12}u} - h_{22}u)$$

$$\text{又は } (u' + h_{22}u^2) e^{h_{22}u} + \epsilon_2 u e^{h_{22}u} = h_{21} v_0 u e^{(h_{22} - h_{12})u}$$

これは積分可能で次式を与える。

$$u = F(u) = \left[u_0 + \frac{\epsilon_2}{h_{22}} - \frac{h_{21} v_0}{h_{22} - h_{12}} \right] e^{-h_{22}u} + \frac{h_{21} v_0}{h_{22} - h_{12}} e^{-h_{12}u} - \frac{\epsilon_2}{h_{22}} \dots\dots\dots(5)$$

$$t = \int_0^u \frac{ds}{F(s)} \dots\dots\dots(6)$$

$F(s)$ という函数は $s=0$ なる時正であって $s=\infty$ なる時は負である。故に $s=u_\infty$ の値に対して消失する。この意味する処は捕食者は終に 0 に向い、若し、その初期に於いて、 $u'(0)=0$ ならば、即ち $h_{21} v_0 > \epsilon_2 + h_{22} u_0$ ならば、捕食者数が先づ増加し、最大 u_m を通過して後に 0 に到る。 u U_m 及び t_m を計算する事は容易である。これら公式の生物学的応用は極めて興味のあるものであるから後に述べよう。

4. 集団密度と供給食料密度との関係

或る場合に於いては、食料供給に関する一集団の比較密度を攻究する事が出来る。

屢々、次の事柄が示唆されている。即ち食料に関連して密度を研究しようとする時、空地面積に関連して行い、この密度研究に代えようとするものがある。このような示唆は、時には満足す可き結果を与える事がある。我々はGauseの行った生物学的実例を考慮して見る。即ち彼はぞうり虫の二種属、一は *Paramecium Caudatum* 他は *Paramecium aurelia* よりなる二つの等質集団の発展を研究した。これらの原虫類は細菌で飼育されるものであるがその溶液は、規則的に更新され、而も細菌増殖には不利益である塩性液中で培養されたものである。又若干の実験では、一日の半定量の食量だけで行ったものである。凡ゆる場合、抑制目的の為に本集団の10分の1は週期的に移動させたものである。若しこれらの環境を考慮すれば、生活係数は次表によって示される値をとる。

	ϵ	h
P. Caudatum 定量培養	1.29	0.0089
P. Caudatum 半定量培養	1.06	0.0155
P. aurelia 定量培養	1.28	0.0265
P. aurelia 半定量培養	1.28	0.0480

“増加係数は比較的安定であるが、極限係数は逆に、日常の培養食量に比例している”。この結果を説明すると、集団 p の密度 $\rho \frac{P}{a}$ は、食料供給 a に関連して、数理論方程式

$$\rho' = \rho (\epsilon - h\rho) \dots\dots\dots(7)$$

を満足するものとする。この場合、係数 ϵ 、 h は一定である。Gauseの実験に於ける如く、食料の供給が一定率に維持される時は、(7)式は実験と完全なる一致を見、次式の如くである。

$$p' = p \left(\varepsilon - \frac{h}{a} p \right) \dots\dots\dots(8)$$

本結果を採用するに当って、集団増加に関する数学的理論の基礎と同様に本数理論法則に於いても有利なる別の議論がある。ただ特記しなければならない事は(8)式を立証する為には、何等(7)式は必要のない事である。一集団要素間の相互圧は、食料が欠乏するにつれて更に大となる故に、もし a が一定値を維持するとすれば、極限係数は a に反比例する一方、 ε は不変となる事は当然である。もし a が変化するとすれば、(7)式は、本問題の条件を最早満足させず、(1)式と矛盾するに到るのであろう。

5. 集団と面積 ; 第一の場合

一集団により占有される面積は、最も重要な極限要因中の一つである。猩々蠅、原虫類等の集団に於いては、近接の出生率、死亡率に及ぶ影響は速かで、各個体の直接近傍は、他の諸個体を直ちに不便ならしめるもので、一個体の死後も、これが完全に分解するまでは、培養環境を汚すものである。しかも一定地域を占有して生残者の増殖を妨害しているものである。依って二つの結論を得る。即ち、第一はこの妨害が無限に存続する事、第二は、死体は或る時期の終わりに於いて、或る期間を限って分解され、これが占有空間は再び利用され得るに到る事である。これら二つの仮定は結局、甚だ困難な結果に到るのであろう。 p を一集団の密度とし、 s を生体、又は死体によって、単位量に付き占有される空間とし、 α を生体の容量、 β を死体の容量とすれば出生率は先づ p の利用空地 $1-s$ に比例すること。第二に、死亡率は p 及び s に比例する。第三に、他の極限要因は無視することは出来ない。つまり出生率に影響を及ぼす。第四に、 β は一定なるものとすれば、比等の仮定によって直ちに、次式を書く事が出来る。

$$p' = pn(1-s) - mps - hp^2 \dots\dots\dots(9)$$

$$s' = p\alpha + m\beta \int_0^t p(u) s(u) du \dots\dots\dots(10)$$

(9)式に於ける $pn(1-s)$ 項は出生率に相当し、 mps 項は死亡率に相当するもので、 hp^2 項は凡て特に指示しない極限要因に相当するものである。(10)式に於ける $p\alpha$ は生体の占める空間を示し、積分項は死体による空間を示すものである。

— 方程式の変形 —

(10)式を微分せば次式の如くである。

$$s' = \alpha p' + m\beta p s$$

又は(9)式を代入して

$$s' = p [\alpha n - s(\alpha n + \alpha m - \beta m) - h \alpha p] \dots\dots\dots(11)$$

(9)(11)式は積分可能な形式であるから、 t を消去すれば

$$\frac{dp}{ds} = \frac{n - (m+n)s - hp}{\alpha n - h\alpha p - s(\alpha n + \alpha m - \beta m)} \dots\dots\dots(12)$$

z は次のような商として与えられる値とする。

$$z = \frac{n - hp}{hs} \quad \dots\dots\dots(13)$$

依って $\frac{dp}{ds} = -z - s \frac{dz}{ds}$

又(12)式の分子は(13)式を代入して次の如くなる。

$$n - (m + n)s - hp = s(hz - m - n)$$

一方分母は次の如く書く事が出来る。

$$\alpha n - h\alpha p - s(\alpha n + \alpha m - \beta m) = s(\alpha hz - \alpha n - \alpha m + \beta m)$$

$$\therefore F(z) = \alpha h z^2 + z(h - \alpha n - \alpha m + \beta m) - (m + n) \dots\dots\dots(14)$$

(12)式は次の様な積分式となるであろう。

$$\frac{ds}{s} = - \frac{\alpha h z - \alpha n - \alpha m + \beta m}{F(z)} dz \quad \dots\dots\dots(15)$$

(14)式は z の二つの値に対して 0 となる

$$z_1 < 0 < z_2$$

p 及び s の初期値は次の如き関係がある。

$$s_0 = \alpha p_0$$

従って、凡ゆる場合に於いて、 s 及び P は次の不等式を満足するものである。

$$s - \alpha p \geq 0 \quad s \leq 1$$

— 積 分 —

(15)式を積分すれば z の函数として s を得る。

$$s = s_0 e^{-\phi(z)} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\text{但し } \phi(z) = \int_{z_0}^z \frac{\alpha h \xi - \alpha n - \alpha m + \beta m}{F(\xi)} d\xi \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$(13) \text{式より } p = \frac{n}{h} - z s_0 e^{-\phi(z)} \quad \dots\dots\dots(18)$$

(16)(18)式は媒介変数の形式で、集団 p 及び占有空間 s を与えるものであり、時間に関しては何等考慮に入れてない式である。そして時間の項を導入しようとするれば

$$\frac{dz}{dt} = -p(z) F(z)$$

を積分しなければならない。これは同じ媒介変数 z の函数として時間 t を与えるものである。

$$t = \int_z^{z_0} \frac{du}{F(u) \left[\frac{n}{h} - u s_0 e^{-\phi(u)} \right]} \dots\dots\dots(19)$$

0608, 及び09式は完全に本問題を解決する。そして、積分式07に於いて分母に多項式Fが示されている以上は、我々は本積分z域間に於いては臨界値 $z_1 z_2$ の起らない事、即ち、F式は常に同符号を有し、zは常に同方向に向って変動しているものである事を確かめなければならない。

— 有効積分 —

次の如く行って積分する。

$$\frac{\alpha h \xi - \alpha n - \alpha m + \beta m}{F(\xi)} \equiv \frac{A_1}{\xi - z_1} + \frac{A_2}{\xi - z_2} \quad \text{と置く}$$

依って次式を得る。

$$A_1 = \frac{\alpha h z_1 - \alpha n - \alpha m + \beta m}{2 \alpha h z_1 + h - \alpha n - \alpha m + \beta m} = \frac{1 + \alpha z_2}{\alpha (z_2 - z_1)}$$

$$A_2 = \frac{\alpha h z_2 - \alpha n - \alpha m + \beta m}{2 \alpha h z_2 + h - \alpha n - \alpha m + \beta m} = \frac{1 + \alpha z_1}{\alpha (z_1 - z_2)}$$

但し $A_1 + A_2 = 1$

訳注： 本計算は単なる恒等式であるから次の如く行い得たものである。

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \alpha h \xi^2 + \xi (h - \alpha n - \alpha m + \beta m) - (m + n) \\ &= (\xi - z_1) (\xi - z_2) \\ &= \xi^2 - (z_1 + z_2) \xi + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha h = 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$z_1 + z_2 = -h + \alpha n + \alpha m - \beta m \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$z_1 z_2 = -(m + n) \quad \dots\dots\dots(3)$$

又分子より

$$\alpha h = A_1 + A_2 = 1 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$A_1 z_2 + A_2 z_1 = \alpha n + \alpha m - \beta m \quad \dots\dots\dots(5)$$

(5)を(2)に代入する

$$z_1 + z_2 = -h + A_1 z_2 + A_2 z_1 = -h + A_1 z_2 + (\alpha h - A_1) z_1$$

$$A_1 (z_2 - z_1) = z_1 + z_2 + h - \alpha h z_1$$

$$\therefore A_1 (z_2 - z_1) = z_1 + z_2 + \frac{1}{\alpha} - z_1 = \frac{1 + \alpha z_2}{\alpha}$$

$$\therefore A_1 = \frac{1 + \alpha z_2}{\alpha (z_2 - z_1)}$$

又、(2)× A_1 -(5)

$$z_1 (A_1 - A_2) = -h A_1 + (A_1 - 1) (\alpha n + \alpha m - \beta m)$$

それに(4)を代入する

$$\begin{aligned} z_1 (A_1 - \alpha h + A_1) &= -h A_1 + (A_1 - 1) (\alpha n + \alpha m - \beta m) \\ \therefore A_1 (2 z_1 + h - \alpha n - \alpha m + \beta m) &= \alpha h z_1 - \alpha n - \alpha m + \beta m \\ \therefore \alpha h &= 1 \quad \text{より} \end{aligned}$$

故に
$$A_1 = \frac{\alpha h z_1 - \alpha n - \alpha m + \beta m}{2 \alpha h z_1 + h - \alpha n - \alpha m + \beta m}$$

A_2 も同様に得られる。

本式は A_1, A_2 共に正で、1より小、更に $A_2 - A_1$ の符号は、 $h + \alpha n + \alpha m - \beta m$ と反対符号を有するものである事を示している。

☆ 第一の場合： $z_0 > z_2$

この時 $F(z)$ は常に正で、 z は時間の減少函数である。そして(10)(8)及び(19)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} s &= s_0 \left(\frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right)^{A_1} \left(\frac{z_0 - z_2}{z - z_2} \right)^{A_2} \\ p &= \frac{n}{h} - z s_0 \left(\frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right)^{A_1} \left(\frac{z_0 - z_2}{z - z_2} \right)^{A_2} \\ t &= \int_{z_0}^z \frac{du}{\alpha h (u - z_1) (u - z_2) \left[\frac{n}{h} - u s_0 \left(\frac{z_0 - z_1}{u - z_1} \right)^{A_1} \left(\frac{z_0 - z_2}{u - z_2} \right)^{A_2} \right]} \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

訳注： (17)式を積分するに当って次の如く出来る。

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_{z_0}^z \frac{\alpha h \xi - \alpha n - \alpha m + \beta m}{F(\xi)} d\xi \\ &= \int_{z_0}^z \frac{A_1 d\xi}{\xi - z_1} + \int_{z_0}^z \frac{A_2}{\xi - z_2} d\xi \\ &= [A_1 \log (\xi - z_1) + A_2 \log (\xi - z_2)]_{z_0}^z \\ &= A_1 \left\{ \log \frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \right\} + A_2 \log \frac{z - z_2}{z_0 - z_2} + K (= s_0) \\ e^{-\phi(z)} &= \left(\frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right)^{A_1} \left(\frac{z_0 - z_2}{z - z_2} \right)^{A_2} \text{ を得る。} \end{aligned}$$

以下同様に(20)式を得る

比処で察知される事は、占有空間が更に増加する事であって、集団は最大限に達し次に減少を示す。即ち二つの結果が可能で z のある値に対し p は消失し、この z に対しては s は、1より小である。(20)の第三式は、ある有限時間 t_1 に於いて、これが起る事を示している。以後起る可きものは如何なる事であろうか？ $s = 1$ になった時、 s は最早変化せず、(10)及び(11)式は

$$s = 1 \quad (t \geq t_1)$$

によって代用される事が出来る。

∴ (9)式は次の如くなる。

$$p' = -mp - hp^2$$

$$\text{これより } p = \frac{mp_1 e^{-m(t-t_1)}}{m + hp_1 - hp_1 e^{-m(t-t_1)}} \dots\dots\dots (21)$$

$t \rightarrow \infty$ なる時 p は 0 に向う。故に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s = 1$$

☆ 第二の場合： $z_1 < z_0 < z_2$

$F(z)$ は常に負で、 z は時間の増加函数である。積分すれば同様に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} s &= s_0 = \left(\frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right)^{A_1} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_2 - z} \right)^{A_2} \\ p &= \frac{n}{h} - s_0 z \left(\frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right)^{A_1} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_2 - z} \right)^{A_2} \\ t &= \frac{1}{\alpha h} \int_0^z \frac{du}{(z_2 - u)(u - z_1)p(u)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

この場合集団密度は下降する。即ち占有空間は最小に達し、後終局には増加する。最終結果は常に次の公式によって示される。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p = 0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} s \leq 1 \dots\dots\dots (23)$$

従って、過程は常に集団の消失に於いて終るものである。

6. 集団と面積；第二の場合

第一の場合と甚しく異なる。又別の場合を考慮して見よう。即ち死体がある時期の終わりに於いて確定的に分解され、夫等の占有空間は、再び利用し得るに到ったものとする場合である。概念を固定する為、今 $\beta = \alpha e^{\sigma(t-\tau)}$ とする。但し、 $t - \tau$ は個体の死後、経過する時間である。前章に於ける最初の三つの仮定はそのまま存続するものであるから、比等の条件に於いて、 p の変異は又(9)式によって示される。即ち(10)式は次式によって置換せられる事が出来る。

$$s = \alpha p + m\alpha \int_0^t p(u) s(u) e^{\sigma(u-t)} du \dots\dots\dots (24)$$

又(11)式は次式により置換される。

$$s' = -\sigma s + \alpha p (\sigma + n - ns - hp) \dots\dots\dots (25)$$

そして不等式 $1 \geq s \geq \alpha p$ は常に満足される。本節と前節との相違は、次式を満足する安定的固定状態 p_c, s_c が存在する事にあるのである。

$$\left. \begin{aligned} n - (m+n)s - hp &= 0 \\ -\sigma s + \alpha p (\sigma + n - ns - hp) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

前節に於いては集団 p は、ある有限時の終わりに於いて、結局消失したのであるが、本節のは、単

に不確定に存在し得ると言う事である。(訳註: 不確定最小値理論) これらの結果は、 β なるものが時間の他の函数として示される時は、真实性を保持しているものである。もし $p(t)$ が、 $\beta(t) \geq B > 0$ なる下限を有しているとするれば、集団 p は常にその極限に於いて消失するものである。反対に、 $\beta(t)$ が 0 に向うものとするれば、その極限状態は、固定状態であってしかもその後引き続き安定的であり得るものである。これらの結論は、代謝産物が何等毒作用を有しておらないと言う条件下に於いて達せられたものであり、もしその毒作用が表われるものとするれば、集団の消失は早晚、ある時期の終わりに於いて、常に起るものである。

第七章 集団増加に関する数学的高次処理法

1. 異った年齢群より成る集団

生活係数は常に年齢に依存しているものである。幼児の死亡率は生物学的方程式で示される平均死亡率よりも可成り超過しているもので、更に文明社会に於いては、極限要因は彼等の両親を通して、間接に子供に働くものである。変態を示す動物、例えば混虫の如き場合は、成虫のみならず幼虫をも考慮し、この幼虫は屢々、異った環境に生活し得るものである事を考えに入れる事は常に必要である。故に、凡てこれらの場合を示そうとする為に、数理論式を利用する事は全く不可能である。各個の集団は別個に取扱い凡ての影響要因、及び凡てのそれ本来の特異性に従って処理されなければならない。若干特別な場合を考慮してみよう。

— 完全変態を行う昆虫 —

今、各変態相が共存し得ない、完全変態を行う昆虫を実例として想像して見る。 $l(t)$ を幼虫の数、 $n(t)$ を蛹の数、 $i(t)$ を成虫の数、 $o(t)$ を卵の数とする。何れも時間 t に於ける数とする。一年の周期を次の四段階に細分する。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{幼虫} & \rightarrow & \text{蛹} & \rightarrow & \text{成虫} & \rightarrow & \text{卵} \\ t_0 - t_1 & & t_1 - t_2 & & t_2 - t_3 & & t_3 - t_4 \end{array}$$

幼虫より始めるに、比等初期に於ける数、 $l(t_0)$ は前世代によって与えられた卵の数に比例するもので、幼虫の増加の割合は単純に夫等の死亡の割合に等しいものである。即ち極限係数は若干の場合に於いて存在するもので、次の如く置く事が出来る。 $l' = -m_1 l - h_1 l^2$ これにより修正された数理論法則を得る。

$$l(t) = \frac{l(t_0) m_1}{[m_1 + h_1 l(t_0)] e^{m_1(t-t_0)} - l(t_0) h_1}$$

次の周期相へと変化する。その瞬間に於いては、蛹の数は、

$$n(t_1) = \lambda_1 l(t_1) \dots\dots\dots(1)$$

係数 $\lambda_1 < 1$ は蛹へと変態した。充分發育した幼虫の割合を示すものである。蛹の周期時代は (t_1, t_2) 期間持続し、この間に蛹の数は、指数法則に従って、減少する。

$$n(t) = n(t_1) e^{-m_2(t-t_1)}$$

比の周期相の終りに於いては、成虫の数は、次式に等しい。

$$i(t_2) = \lambda_2 n(t_2) = \lambda_2 n(t_1) e^{-m_2(t_2-t_1)} \dots\dots\dots(2)$$

係数 $\lambda_2 < 1$ は成虫へと変態した、發育充分なる蛹の割合を示すものである。成虫相の期間に於ける事情は幼虫相に於けると同様に進行する。即ち、集団の減少は修正数理論法則に従うものである。

$$i(t) = \frac{i(t_2) m_3}{[m_3 + h_3 i(t_2)] e^{m_3(t-t_2)} - i(t_2) h_3} \dots\dots\dots(3)$$

但し、 $m_3 h_3$ は死亡率、及び極限係数で、何れも本周期相に属するものである。凡そ、 t_3 に於いて産卵が行われるものとすれば、この時期に於ける集団は $i(t_3)$ に等しい筈で産卵数は $i(t_3)$ に比例する。

$$o(t_3) = \lambda_3 i(t_3) \quad \dots\dots\dots(4)$$

産卵と孵卵との間に経過する ($t_3 t_4$) 期間に於いて卵の数は指数法則に従って減少する。

$$o(t) = o(t_3) e^{-m_2(t-t_3)}$$

これは次式に等しい幼虫の数を t_4 時に於いて与えるものである。

$$l(t_4) = \lambda_4 o(t_4) = \lambda_4 o(t_3) e^{-m_4(t_4-t_3)} \quad \dots\dots\dots(5)$$

但し λ_4 は孵卵した卵の割合を示すものである。 $o(t_3)$ を(4)に依り、 $i(t_3)$ を(3)に依り、順次に、置換して行くと次の世代の初期に於ける幼虫の数ともとの数 $l(t_0)$ との関係式を得る。

$$l(t_4) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 m_1 m_3 l(t_0) e^{-m_1(t_1-t_0) - m_2(t_2-t_1) - m_3(t_3-t_2) - m_4(t_4-t_3)}}{m_1 m_3 + m_3 h_1 l(t_0) (1 - e^{-m_1(t_1-t_0)}) + h_3 m_1 l(t_0) e^{-m_1(t_1-t_0) - m_2(t_2-t_1)} (1 - e^{-m_2(t_3-t_2)})} \quad \dots\dots\dots(6)$$

この循環を多く繰り反したその終りに於いては l はある極限 L に向うものである。

$$L = \frac{m_1 m_3 [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 e^{-m_1(t_1-t_0) - m_2(t_2-t_1) - m_3(t_3-t_2) - m_4(t_4-t_3)} - 1]}{m_3 h_1 (1 - e^{-m_1(t_1-t_0)}) + m_1 h_3 e^{-m_1(t_1-t_0) - m_2(t_2-t_1)} (1 - e^{-m_2(t_3-t_2)})} \quad \dots\dots\dots(7)$$

これは次の不等式が成立する限り続くものである。

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 > e^{m_1(t_1-t_0) + m_2(t_2-t_1) + m_3(t_3-t_2) + m_4(t_4-t_3)} \quad \dots\dots\dots(8)$$

此の条件は不等式 $\varepsilon = n - m > 0$ と同等のもので、数理論的集団の場合に於いては、0 以外の安定状態の存在には重要なものである。全循環を T を周期として区分した。

$$t_2 \quad t_2 + T \quad t_2 + 2T$$

に於いても、成虫の数に関して、之を行えば同様な結果を見出すであろう。

原値を $l(t_0) = L$ とすれば一循環終期に於いては

$$l(t_0 + T) = l(t_0) = L$$

と言う意味に於いて固定状態であり得るのである。もし $l(t_0) < L$ ならば、 $l(t_0 + nT)$ は増加して L に向う。 $l(t_0) > L$ ならば、 $l(t_0 + nT)$ は減少して L に向う。再び注目すべき事は、本節に於ける固定状態は、週期 T を有する一種の波動的なる実体を有しているから次の如く書く事である。

$$l(t + T) = l(t) ; i(t + T) = i(t) \\ o(t + T) = o(t) ; n(t + T) = n(t)$$

又、ある量を更に累積する事が出来る最も複雑した場合でも同様に処理され得る。

— 共存変相の場合 —

一週の循環が長期に亘らないで、諸相の共存現象が可能なものを考慮して見よう。この場合成虫になった蛹の数は、幼虫数に比例し、孵卵数は成虫数に比例する。故に本系統式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} l'(t) &= v i(t) - \mu_1 l(t) - k_1 l(t) - h_{11} l^2(t) \\ i'(t) &= -\mu_2 i(t) + k_2 l(t) - h_{22} i^2(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

これより自然に仮定される事は幼虫と蛹は異った出発点に属し、従って極限係数 $h_{12} h_{21}$ は0なる事である。

二つの場合に本問題は区別される。第一に、多産率 v 及び変態係数 $k_1 > k_2$ は二つの死亡率効果を減少せしめるに充分大であるから

$$k_2 v > k_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2$$

即ち二変相間の平衡は可能であって、根限は次の如くである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l = L \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i = I$$

但し L 及び I は次の代数方程式の正根である。

$$v I = L (k_1 + \mu_1 + h_{11} L) ; k_2 L = I (\mu_2 + h_{22} I)$$

極限に到る経過は変動なくして行われ、

$$k_2 v < k_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2$$

この場合は、前述した正根は十分なものでなく、集団は極限に於いて消失するものである。

2. 季節的増殖を行う動物

季節的に生殖を営む動物実験例の多くより、我々は Bashkiria 国立公園に於ける、雷鳥及び山鳥に関して、S. Sewertzoff が観察した実例を選ぶ事が出来よう。これらの集団は、蔽密に異った年齢群より構成されて居り、孵卵後は特に顕著である。Sewertzoff はロシアの夏季、六・七・八月の孵化を伴う季節に若い年齢群に注意を向けたのである。彼の示す処に依れば、一巢毎に、若鳥の平均数は指数法則に従って減少している。この減少は多くの原因に存するものであろうが、主として、多くの捕食者が活動するのに依るものであろう。比処に述べる式は本結果の説明に満足な解答を与えるものである。今、 x を若鳥の数、 y を成鳥の数に比例する巢の数、又 z を捕食者の数とする。次に今考慮している週期では卵は凡て孵化するものとする。依って、集団 x は増加していないと仮定しなければならない。即ちこれが減少は、親鳥の死滅、気候の酷烈さ又は捕食者に帰因する若鳥の死滅及び巢の完全な破壊と言った甚だ異った原因によるものである。各々比等の要因は本方程式中に夫々計入される。捕食者に関しては、雷鳥の成鳥が存在するか否かによっては、何等制限されない。本系統はこの条件下に於いて次式の如く書く事が出来る。

$$x' = -(\mu + m)x - (\lambda_1 + \lambda_2)xz - hxy \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$y' = -my - hy^2 - \lambda_2 yz \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$z' = -\theta z - kz^2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

但しこれらの諸式は夏期と言う特別の条件にのみ適用されるものである。 $u = \frac{x}{y}$ を巢毎の若鳥の平均数とすれば(10(1))より次式を得る。

$$u' = -u (\mu + \lambda_1 z) \quad \dots\dots\dots(13)$$

捕食者の減少度は若鳥の減少度に比して極めて遅いものとすれば、我々は(13)式の近似値を得るであろう。

$$u = u(0) e^{-(\mu + \lambda_1 x) t} \quad \dots\dots\dots(14)$$

これは巢毎に若鳥の平均数は指数法則に従って減少していると言う論述を再確認せしめるものである。本公式を使用すれば Sewertzoff 図表と次の如く密接に一致を示している。

日 時	6 月		7 月			8 月	
	7 日	21 日	1 日	13 日	23 日	2 日	18 日
巢 別平均	観察数		5	4	3.9	3.9	2.9
	理論数		6.2	5.4	4.9	4.3	3.9

日 時	6月19日	8月2日	8月17日	
巢 別平均	観察数	5.4	4.6	3.8
	理論数	5.5	4.3	3.9

これらの事例に依れば増殖季節を有する動物に対して、計算される日時は自然の循環に相当していなければならない事を示している。故に我々は単なる同質の統計的事実と有益に比較する事が出来る。即ち多くの完全循環によって、細分される日時と言うものに関係するこれらの統計事実と比較するのに役立つのである。これは、一循環中の集団に関する移動研究を行う事によって更に完成される可きものである。

3. ロジスティック (数理論) 法則の一般化

本法則の一般化は次式に関して論及されて来たものである。

$$p' = F(p) = \varphi(p) - \psi(p) \quad \dots\dots\dots(15)$$

但し函数 $\psi(p)$ は凡て集団増加に及ぼす好都合な要因を、 $\varphi(p)$ は凡て不都合な要因を代表したものであった。我々は数理論法則を改善しようとする意図を持っているので特別な場合を考慮しよう。本法則は多産率の減少及び死亡率の増加は数理論法則が示すものよりも屢々速かなので、基礎論に関して批判される事が往々ある。そこで

$$\psi = n p e^{-\nu p} \quad \varphi = m p e^{\mu p} \quad \dots\dots\dots(16)$$

と置いて次の式を示そう。

$$p' = p [n e^{-\nu p} - m e^{\mu p}] \quad \dots\dots\dots(17)$$

二つの異った場合がある。第一は $n < m$ で p_0 の原値如何を問はず p' は常に負となり p は 0 に向う。第二は $n > m$ なる場合で、 $n e^{-vp} - m e^{\mu p} = 0$ の式は一根 w を有しているものである。

$$w = \frac{1}{v + \mu} \log \frac{n}{m} \dots\dots\dots (18)$$

$p_0 < w$ とすれば(17)の解

$$t - t_0 = \int_{p_0}^p \frac{ds}{s (n e^{-vs} - m e^{\mu s})}$$

は単純なる積分式として示され、時間 t を与えるものである。集団 p は極限 w に向う。 t が十分大なる時は、漸近式

$$p \approx w - A e^{-vt} \dots\dots\dots (20)$$

は $\eta = m e^{\mu w} (v + \mu)$ となって数理論法則と類似のものとなる。更に p_0 が小さい時は(17)式はその経過の初期に於いては Malthus の式によって置換される。

$$p' = (n - m) p \quad p = p_0 e^{(n-m)t} \dots\dots\dots (21)$$

既に示したように、計算の安易は別としても再び以上のように数理論法則の重要特質が示される。(17)式が、数理論法則よりもよく事実の真相を表すものであると言う事が若し立証され得るなら、比処に述べた後述論は無視され得る。扱て、今や数理論法則と言うものは、よく事実によって支持されて居ると言える。これに反して(17)式の計算は困難を極め、混合集団に対しては特に克服し難いものとなる。事実、等質集団というもの存在していない。故に数理論法則を活用する事こそ当を得たものと言う事が出来る。

4. 集団人口の老衰

屢々述べられる事は、一集団なるものは恰も一有機体の如く、老齢に左右されて凡ての生活機能が緩慢な凋落を示す事である。(19)式に減少要因 $\sigma(t)$ を導入して、老衰現象を示せば次の如くである。

$$p' = F(p) \sigma(t) \dots\dots\dots (22)$$

本式は(19)式に、その独立変数を変換せしめる事に依って容易に還元される。

$$u = \int_{t_0}^t \sigma(t) dt \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dp}{du} \sigma(t)$$

故に(22)式は次の如くなる。

$$\frac{dp}{du} = F(p) \dots\dots\dots (22')$$

老衰式の別の形は次式である。

$$p' = F(p) + F_1(p) e^{-\sigma t} \dots\dots\dots 24$$

$p < w$ なる限り $F_1(p) > 0$ であるとすれば、この p は $F_0(p) = 0$ の最小根である。更に $F'_0(w) < 0$ とすれば $F_1(w) > 0$ しかも函数 F_0, F_2 は w の近傍で Taylor の定理によって展開され得る。

$t \rightarrow \infty$ なる時、集団 p は w に向うが以下二つの場合がある。

(i) $\lambda = -F'_0(w) < \sigma$;

この場合は次の如き近似形を得る

$$p \sim w - c e^{-\lambda t}$$

(ii) $\lambda = -F'_0(w) > \sigma$;

この時は $p \sim w - \frac{F_1(w)}{\sigma - \lambda} e^{-\sigma t}$

この場合は量的に言って数理論法則と違わないものである。法則24に従う集団は、十分長期間の末に達す可き最大 w を有しているものである。

終局の処は22式の特別な場合を考慮すれば良い訳である。

$$p' = \varepsilon p e^{-\sigma t} \dots\dots\dots 25$$

これの解は、

$$p = p_0 e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}(1-e^{-\sigma t})} \dots\dots\dots 26$$

で、 $t \rightarrow \infty$ に対しては、極限に向う。

$$\lim p = p_0 e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}}$$

要約すると、“本式に於ける老衰要因の導入は、数理論式に於ける極限項目と同様な結果を与えるものであるが、極めて重大な差異がある。即ち p の終局の値は、本式に於いては、正確にその原値に比例しているものであるが、数理論式に於いては、全く無関係である。”

この独立性は、観察によって適宜に、確立されるものようである。故に殆んど例外なく、集団増加に関する理論に老衰要因を導入する事は正当でない。然し一方、この要因は一有機体成長の理論に於いては極めて重大な価値があるものと言う可きである。

5. 集団増加の動態公理

集団増加の動態理論に関する凡て比等の主たる形式は比等の運動性と言う事である。到る処に於いて、我々は作用、及び効果について云々しているのを聞いているが、物理学や天文学に於けるこのような重要な勢力の概念はまだ導入されておらない。然し類推概念は若干の著者にある示唆を与え、個体或は媒体の移動に関して集団増加の微分方程式を構成する概念を与えた。この式に於いては、本系統に作用する凡ての勢力は完全に均衡を加味保持されている。即ち、(1)外的勢力、(2)内的勢力及び、抵抗力、(3)凡て上記勢力を平均化する慣性力等である。数学的見地から見れば、単一の変数である場

合は、この得失対照表は二次の微分方程式によって示されるものである。

$$\frac{d^2 p}{d t^2} = E + I - R \quad \dots\dots\dots(28)$$

e は外的勢力の総量を、 i は内的勢力、 r は抵抗力を示すものである。Quetelet の“社会物理学”と言う著者には本問題に関して甚だ興味のある議論がある。“集団人口理論はつまるところ、次の二原則に帰着せしめ得られる事が出来、私は以後、集団増加及び之に影響のある原因の分析が根本的と考えている。集団は等比級数的に増加する傾向を有し、抵抗力或はこの増加の障害となる可き凡ての総和は、他のものが等しい時は、集団増加速度の二乗に比例して変動するものである。斯くして障害がなく、自由に一集団が増加し得る時は幾何級数的に増加するであろう。もし阻害する傾向を持ったもので、なお一様な仕方で作作用する凡ゆる種類の障害中で増加が行われるとすれば、即ち社会状態が不変であるとすれば、集団は無限には増加しないで、次第に累進し、更に固定的となる傾向がある。”と Quetelet のこの概念に鼓舞されて Delevski は他の勢力がない場合は次の様な慣性力の方程式を書いたのである。

$$p'' = \epsilon p' \quad \dots\dots\dots(29)$$

これは明に Malthus の法則 $p' = p_0 e^{\epsilon t}$ に相当しているものである。本項目に加えて、正負の異った作用を更に示す為には次の微分方程式を書いた。

$$p'' = a - b p + (\epsilon - a') p' - a'' p'^2 \quad \dots\dots\dots(30)$$

本方程式に於いて $a - b p$ は外的勢力を示し、 $a' p'$ 、 $a'' p'^2$ 項目は機械的運動方程式に於ける媒体の摩擦又は抵抗力に相当するものである。私はこの試みを批判したり、又は非難する事を欲しない。周知の如く 17 世紀及び 18 世紀の科学界に於いては Newton の概念と衝突する反対があつて、勢力なる概念に関する限り、Newton 以前の時代に我々は立ち帰り、私の意見を言えば、これこそ取る可き賢明な道順と思う。過去二世紀間の本概念の行った利益を忘れる事があつてはならないのである。然し乍ら(29)式には未だ望ましい形が更に与えられる可きである。

$$p'' = \epsilon^2 p \quad \dots\dots\dots(31)$$

即ち集団増加の慣性力は p に比例するものであり、更に(30)式の一般式は数理論法則によって証明される可きものであるが未だ行われてはいない。特に集団並びにこの増加に同時に比例する抵抗力と言うものが欠如している。比等の訂正を施した式は次の様である。

$$p'' = a_{00} + (\epsilon^2 - a_{10}) p - a_{01} p' - a_{02} p'^2 - a_{11} p p' \quad \dots\dots\dots(32)$$

本形式は(30)式より複雑で更に論理的で、加えるに次の特別な値を有する係数に対しては数理論法則によって立証されるものである。

$$a_{00} = 0 \quad a_{01} = \epsilon \quad a_{11} = 2 h \quad a_{10} = \epsilon^2 \quad a_{02} = 0$$

更に有利な事は $a_{00} = 0$ 、 $a_{10} = \epsilon^2$ の時、容易に積分され得る事である。この(32)式は次の如くなる。

$$p'' + a_{01} p' + a_{11} p p' + a_{02} p'^2 = 0$$

$$\text{又は } (p'' + a_{02}p') e^{a_{02}p} + a_{01}p' e^{a_{02}p} + a_{11}p' p e^{a_{02}p} = 0$$

或は再び積分した後

$$p' = H e^{-a_{02}p} - \frac{a_{01}}{a_{02}} - \frac{a_{11}}{a_{02}} p + \frac{a_{11}}{a_{02}^2} \dots\dots\dots(33)$$

$$\text{故に } t = \int_{p_0}^p \frac{ds}{H e^{-a_{02}s} + \frac{a_{11}}{a_{02}^2} - \frac{a_{01}}{a_{02}} - \frac{a_{11}}{a_{02}} s} \dots\dots\dots(34)$$

本式に依って与えられる函数 p は質的に数理論法則と類似しているが、更に円滑柔軟なものである。残存抵抗力の累積を示す積分項目によって(32)式は更に完全なものとなるであろう。

第八章 種属間関係

1. 一般的考察

混合集団増加の問題は等質集団発展のそれを思い起こす。然し可成りの相違を示しているのは異った種属間の関係は必然的に同種集団の場合に於けるよりも更に複雑な形式を取ることである。この混乱的複雑性は凡ての分析、特に数学的分析を回避せしめるものようである。然し多くの場合、比等の関係は前章に於いて研究されたものと同様に単純に、微分又は積分方程式によって示す事が出来るのである。これは地表上に於ける種属間の関係問題ではなくて、多少とも孤立した、又は親しい内部的経過によって孤立させ得るということである。この錯綜した小社会に於いては、食料の供給や各種の避難所及び季節的变化に伴う気候的条件等がある。このような集団は屢々、眼に見えない関連を以て低次の小社会へと細分され得る。ある段階に於いて起こった種属は無数の他の種属中に、同様な然し一致しない環境に於いて見出される。この様な条件の下の変化は生活係数の変化となって示される。併し混合集団の将来は比等の係数に依存しているので生存競争の相互の結果に関する確率が評価される。かくして演繹的にある程度まで或る型の一連の段階に於ける一種属又は若干の種属の将来を我々は豫見し得る。恆久的な要因の外に、我々は間歇要因をも考慮する事が出来る。この効果は一つ又は数群のものが最大を越える時か又はある水準以下に低下する時に現われるもので、既に流行病に随伴して起こる小齧歯類動物の場合に見られる。凡て、比等の問題に於いては二つの反対的傾向がある。即ち、

(1) ある状態を占める有機体群はある平衡状態へと向う傾向がある。

(2) しかし平衡は不可能であるかも知れないと言う二つである。

第一の場合は終極安定状態が時間の多少こそあれ、その終期に於いては、事実達せられ、之の後は維持されるものである。本状態は第二章の式が生物学的空間の正なる区域に於いて単純な一組の解答のみを許す時は、初期状態には無関係なものであった。他の場合に於いては、斯る系統は安定的な平衡状態の一に向い、この平衡は間接にその初期状態に依存している。即ち結局、ある場合に於いては終期に於ける状態が直接にその初期状態に依存する事もあり得ると言う事である。生物学的状態の安定性は永久なものではない。不完全な孤立状態や突然変異の出現、新要因の干渉、及び他の原因等に依り生活係数は変化する。人類社会に於いては生活環境に於ける技術的の発達、及び改善、社会機構の突然又は連続的变化等が凡て生活係数に影響を与えるものである。生物学的系統の不安定なものに関しては、達する事も出来なければ又接近し得る事も出来ない様なある平均状態を廻って、多少とも週期的な振動が行われる。此等は個々に論述される可きものである。此等の振動は Lissajous の図形の如く、生物学的空間に於いては全くある区域又は縮閉された一定の囲まれた面積を充足している事が起こり得る。斯る動態的平衡は何等一般的な安定性を有しておらない。次に観察される可き事は種属間の関係であって、これは何等競争と言う事柄に止まらず、生存競争以外に、多くの異った仕方に於いて相互作用がある。即ち一方的なもの(寄生作用)、双方的なもの(共棲作用)等で、時には自由に、又は偶然に、時には分離し難い程度まで行われる。此の現象は重大なものである事は、多細胞器官中の関係問題が之に依存しているからである。生活係数は極めて不安定で、次の実例はこれらの変異に関して若干の概念を与えよう。Kalabuchow に依れば、自然界に於いて明らかに季節的循環に従う廿日鼠と同様に小齧歯類動物は、年中凡ゆる時期に於いて、よりよく環境を整備すれば、全く

増殖可能であると言う。我々は簡単な計算に依って増加係数 ϵ に於ける変異の値を求め得る。自然環境に於いては本係数は一年に付一の単位のものであるが、季節的増殖は一年に付凡そ20の年出生率を与える。然るに最適条件下に於いての増殖は年 $n \sim 200$ を与えるものである。これの意味する処は最適条件の下では ϵ は一年に付 180 の単位であると言う事である。したがって生活環境の如何を問はず、種属は不変の性質であるところの生活係数を見做す事は出来ない。この生活係数の構造を理解する為に、比較的簡単な場合を考慮して見よう。食料を求めんとして永久に抗争する二種属に関して今各々は遭遇毎に他を食するものとし、 $p_1 p_2$ を夫々の数とする。一つ又は他の敵方の勝利の確率に関しては常に数的計算が可能で、又勝負のつかない時に関しても計算し得る。例えば π_1 を p_1 の勝利の確率とし π_2 を p_2 のそれとし、 π_{12} を判定しない確率とすれば明らかに $\pi_1 + \pi_2 + \pi_{12} = 1$ である。 $h p_1 p_2$ を単位時間に会おう数としよう。抗争による直接的損害は p_1 群の生活方程式中に導入された $-h \pi_2 p_1 p_2$ 項によって示され、 p_2 群の式には $-h \pi_1 p_1 p_2$ を以て示される。更にこれに止らず、何等結果を生じなかつた遭遇は二群の出生、死亡率に効果を与えるものである。又相手側の餌食となる事実は生活係数に影響を与えずにはおかないであろう。斯る影響は捕食者、及び餌食者の数に比例するもので、又食料の生理学的運用にも依存する。もし二群の器官が生理学的に同様であったとすれば $+k \pi_1 p_1 p_2$ 及び $+k \pi_2 p_1 p_2$ は別個に二群の生活式中に加えられる可きものである。結局、判別のしなかつた遭遇は $-l \pi_{12} p_1 p_2$ 及び $-l \pi_{12} p_1 p_2$ の項によって表現される。したがって二群の微分方程式は次の如き形を取る。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - h_{11} p_1^2 - (h \pi_2 - k \pi_1 + l \pi_{12}) p_1 p_2 \\ p_2' &= \epsilon_2 p_2 - (h \pi_1 - k \pi_2 + l \pi_{12}) p_1 p_2 - h_{22} p_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{又は} \quad \left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - h_{11} p_1^2 - h_{12} p_1 p_2 \\ p_2' &= \epsilon_2 p_2 - h_{21} p_1 p_2 - h_{22} p_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{但し} \quad \begin{aligned} h_{12} &= h \pi_2 - k \pi_1 + l \pi_{12} \\ h_{21} &= h \pi_1 - k \pi_2 + l \pi_{12} \end{aligned}$$

更に二乗形の $h_{11} p_1^2$, $h_{22} p_2^2$ は同種属の各個体の相反する極限作用を示すばかりでなく、凡ての外的内的極限要因をも表わしているものである。

かくして、生理学的に同様な二捕食種属の特殊ではあるが比較的単純な場合は、これらと一致しない環境に応じて正負何れかの内的作用係数 $h_{12} h_{21}$ を与える。更に複合している場合に於いては、小社会に起こる各活動に相当する補助的項目が生物学的方程式の中には現われる。

前章に於いて見られた処に依り、凡て比等の項目は、群の数的効果に関連して、次元が 0, 1 又は 2 のものである。然し高次の項も豫知され得る。即ち我々は $p_1 p_2$ 間の争闘の残餘物を単に食する第三群 p_3 によって二捕食種属の本系統を完成する事が出来、この時これより受ける利益は三つの効果 $p_1 p_2 p_3$ の積に比例するのである。

2. ナガニシ, 胎貝, ツメ貝

我々は E. Fischer-Piette に依って観察された極めて興味のある循環を改究しよう。本問題は、Pointe du Décollé の胎貝床上に於いて十年の間週期的に観察された貝(ナガニシ及び胎貝)と無柄甲殻類(ツメ貝)との関係に関するものである。Fischer-Piette は此等の関係を研究し、此等動物群の平衡が乱された後、再び積極的に第一の平衡状態を回復するに到るものである事、又攪乱後此等三群間には相互作用がある事実を知る事が出来た。更に胎貝床に於ける周期現象はよく解明されて

いる。斯くして Fauel は St Vaast-la-Hougue の近傍に於いて、Isigny 湾の貽貝が屢々迅速に St Vaast の附近に移住し、次に彼等の敵である人間や特にヒトデ等の攻撃の為に消滅しているのを見出した。本過程は次の諸相より成っている。

- (1) 貽貝の急速な発展
- (2) ヒトデが周囲より集って来て、豊富な食料を見出し、為に驚異的に増加する。
- (3) 此等ヒトデの暴食、及び人間の破壊作用は速やかに貽貝を凌駕する。
- (4) 餌食貽貝が欠乏するにつれて、次にヒトデは消滅の傾向を示し、次の貽貝が新しく移住するのに工合よく、この場所を清い空間として提供する。
- (5) 新しい循環が始る。

Fischer-Piette によって観察された場合の現象は更に複雑であった。ナガニシは貽貝或はツメ貝を食し得るが、特にツメ貝を好んで食し、他の食料がない場合に限って貽貝を食する。この好みは、貽貝を食した方が彼等にとって極めて良好なる物であろうと思われるのであるが、この事実より見れば甚だしく驚異的なものと言う可きである。この好みこそ、周期的振動を現出せしめ、之を続行せしめ得るものであることを示そう。第一に Fischer-Piette の結果から始める。

- (1) 稠密なる集団を以て、岩石を蔽う、ツメ貝が再生した事に本循環は始る。ある大いさ以下のツメ貝は無視されるけれども、その他のものはナガニシに食を与えるものである。ナガニシは貽貝に附着しているツメ貝を食するが貽貝そのものは食べないでいる。
- (2) 貽貝によって、ツメ貝が圧倒されている広範囲の地域に互って、貽貝が夥しく孵化して新生する事はツメ貝の死を招来するものである。
- (3) 先づ此等のツメ貝を食したナガニシは食を奪われ、食物を変えて貽貝を攻撃し始め、ナガニシは夥しく増殖する。即ち彼等の食料が絶対的必要に迫られて、貽貝を食するに到ったのであるが、これは反ってナガニシにとって好適宜なのである。このナガニシの増加は急速に貽貝床の減少を結果する。
- (4) ツメ貝の幼虫がこの間に固定し始め、この時までナガニシの活動によって貽貝から取除かれていた表面は、再びツメ貝によって新しく蔽はれるのである。
- (5) 此等のツメ貝が十分大きく生長するや否や、ナガニシは彼等の原食料に復帰して夫等を食し始める。ナガニシから取り残された貽貝のみはその後、破壊を免れて、本循環は再び始る。かくして、もし貽貝が偶然に異常な増加をして、為に平衡が乱されたとすればこの攪乱の直接的結果は（ツメ貝を隠蔽する事）反対要因を許す事になり、ナガニシは夫等を破壊し始める。この破壊はこの作用を抑制する別の要因が働かない限り、即ちナガニシを夫等の食餌より引き放すツメ貝が復活しない限りは完全絶滅に到るまで行われるのであろう。この関係を微分方程式で示して見よう。 p_1 をツメ貝の数、 p_2 を貽貝の数、 p_3 をナガニシの数とする。

(1) 第一段階

第一段階は次の微分方程式に依って合成される

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \varepsilon_1 p_1 - h_{13} p_1 p_3 - h_{12} p_1 p_2 - h_{11} p_1^2 \\ p_2' &= \varepsilon_2 p_2 + h_{21} p_1 p_2 - h_{22} p_2^2 \\ p_3' &= \varepsilon_3 p_3 + h_{31} p_1 p_3 - h_{33} p_3^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

此等の方程式は初期の周期に関係し、ツメ貝の豊富な事によって特性付けられたものである。第三式に p_2 が存在しない事は、ナガニシがツメ貝をのみ好んで食する（一項 $h_{31} p_1 p_3$ ）事を意味するものである。第二式に於ける $+h_{21} p_1 p_2$ はツメ貝を隠蔽していた貽貝の増加が始る事を

示すものである。もしツメ貝の増殖率が大でなければ本周期相に於いては平衡は不可能である。又甚だ有り得可き事としては不等式

$$\epsilon_1 < \epsilon_2 \frac{h_{12}}{h_{22}} + \epsilon_3 \frac{h_{13}}{h_{33}} \dots\dots\dots(4)$$

が本段階に於いて満足される事である。したがって、集団 p_1 が減少して或る水準下 $p_1 \leq \pi_1$ に到った時はこの関係は根本的に変化されるのである。

(2) 第二段階

ツメ貝は今や散在するばかりで、ナガニシは貽貝を食し始める。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - h_{11} p_1^2 \\ p_2' &= \epsilon_2 p_2 - H_{23} p_2 p_3 - H_{22} p_2^2 \\ p_3' &= E_3 p_3 + H_{32} p_2 p_3 - H_{33} p_3^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

本期間中、ナガニシの増加は極めて、急速で、 E_3 が次の不等式を満足すると言う事はあり得る。

$$E_3 > \epsilon_2 \frac{H_{33}}{H_{23}} \dots\dots\dots(6)$$

この意味する処は本段階中、平衡は不可能であって、集団 p_2 は減少し、次第に自身を再建するツメ貝の復活に対して岩表面が解放される事である。この点に於いて第三段階が始る。

(3) 第三段階

貽貝は殆んど消失し、微分方程式は次の形を取る。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - \eta_{13} p_1 p_3 - \eta_{11} p_1^2 \\ p_2' &= \epsilon_2 p_2 - \eta_{22} p_2^2 \\ p_3' &= \epsilon_3 p_3 + \eta_{31} p_1 p_3 - \eta_{33} p_3^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ツメ貝はナガニシに依って食べられるが、貽貝が第二回目に攻撃される事は単に本段階の終期に向って、見られるものである。かくて、本周期相の間にそれ自体打ち建てられていた比較的の平衡状態は覆えされ、循環は再び始る。Fischer-Piette の報告は各相期間を除き何等図形を与えず。1925年より、1929年まで、貽貝は殆んど不在であった。かくて第三段階は4年間にわたっている。1929年に及んで貽貝の孵化が大に起こり平衡は乱された。1932年にナガニシは貽貝を穿ち始め、故に第一段階は3年を要する。この時より貽貝床の縮少が観察されているのである。

3. 残存作用

第五章に於いて我々は残存作用に関して特別な場合の数的処理を完全に与えた。即ちそれ本来の代謝産物蓄積の為に集団が損傷されると言う事であったが生活係数を累積して変化せしめる他の残存作用は容易に示唆され得る。例えば理論上、器官に及す環境の作用に依って産出される遺伝的効果の累積を我々が知り得るといった例で、方程式の形に於いては Lamarck の理論を示すものである。本節では、混合集団を構成する二群 $p_1 p_2$ 間の相互の毒作用に関する研究に止める。次の方程式により増加係数を置換する事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \epsilon_1 - c_{11} \int_0^t k_{11}(t-s) p_1(s) ds - c_{12} \int_0^t k_{12}(t-s) p_2(s) ds \\ E_2 &= \epsilon_2 - c_{21} \int_0^t k_{21}(t-s) p_1(s) ds - c_{22} \int_0^t k_{22}(t-s) p_2(s) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

微分方程式は積分式へと変化させ得る。

$$\left. \begin{aligned} p'_1 &= p_1 (E_1 - h_{11}p_1 - h_{12}p_2) \\ p'_2 &= p_2 (E_2 - h_{21}p_1 - h_{22}p_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

一般には残存作用は時と共に減少するもので、この残存作用 $k_{ik}(u)$ は減少函数である。更に残存作用 $c_{11}c_{12}c_{21}c_{22}$ の係数が存在する事に依って、一般に次の如く書く事が出来る。

$$k_{ik}(0) = 1$$

この函数形は理論的に実験より推論され得るものであるが、事実に於いては、この研究の導く処は満足す可き結果に到ったと言うような実例は何等得られない。次に本函数には極めて単純な数学的形式が与えられるのである。この積分方程式の解は、単一な変数の場合に於いてさえ、甚だ困難な問題である事は知られている。故に此処には二つの最初の近似式を以て間に合う二・三の単純例を紹介するに止めたい。これらの近似式は満足し得る程度に計算され得る。即ち

$$k_{11}(u) = k_{12}(u) = k_{21}(u) = k_{22}(u) = 1 \dots\dots\dots(10)$$

と置く。

第一例； 内的闘争係数が0と言う二種属の場合を考慮して見よう。即ち密度の低い混合集団の場合である。(9)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p'_1 &= p_1 (E_1 - h_{12}p_2) \\ p'_2 &= p_2 (E_2 - h_{21}p_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

媒介変数 $c_{11}c_{12}c_{21}c_{22} \dots\dots$ に関して Taylor の理論に依り $p_1 p_2$ を展開すれば

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_{10} + c_{11}p_{11} + c_{12}p_{12} + c_{21}p_{13} + c_{22}p_{14} + \dots\dots \\ p_2 &= p_{20} + c_{11}p_{21} + c_{12}p_{22} + c_{21}p_{23} + c_{22}p_{24} + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

(11)式に此等を代入し、その第一近似式を示せば

$$\left. \begin{aligned} p'_{10} &= p_{10} (\varepsilon_1 - h_{12}p_{20}) \\ p'_{20} &= p_{20} (\varepsilon_2 - h_{21}p_{10}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

これは符号が第二章(10)と異なるのみである。我々はこの時高次の近似に対して次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} q'_1 &= \frac{q_1 p'_{10}}{p_{10}} - h_{12}p_{10}q_2 - p_{10}A_1 \\ q'_2 &= \frac{q_2 p'_{20}}{p_{20}} - h_{21}p_{10}q_1 - p_{20}A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

但し $q_1 q_2$ は展開式(12)に於ける一対の対応している函数を示し、 $A_1 A_2$ は低次の近似式にのみ依存している函数である。此等の函数は容易に積分される。第一式に $\frac{p'_{20}}{p_{10}p_{20}}$ を第二式に $\frac{p'_{10}}{p_{10}p_{20}}$ を掛け両式の差を取れば

$$h_{21}q'_1 - h_{12}q'_2 - \varepsilon_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{q_1}{p_{10}} \right) + \varepsilon_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{q_2}{p_{20}} \right) = \frac{A_1 p'_{20}}{p_{20}} - \frac{A_2 p'_{10}}{p_{10}}$$

これを積分すれば次式を得る。

$$q_2 p'_{10} - q_1 p'_{20} = p_{10} p_{20} \int_0^t \left[\frac{A_1 p'_{20}}{p_{20}} - \frac{A_2 p'_{10}}{p_{10}} \right] d s = B(t) \dots\dots\dots(15)$$

本式に於いて $B(t)$ は第二項を示すものである。(14)式の第一式に(15)式に依って決定される函数 q_2 を置き、(13)式より得られる値に依って p'_{20} を置換すれば次式を得る。

$$\frac{q'_1 p'_{10} - q_1 p''_{10}}{p'_{10}{}^2} = -\frac{p_{10} A_1}{p'_{10}} - \frac{h_{12} p_{10}}{p'_{10}{}^2} B$$

但し単純化する為に

$$B(t) = p_{10} p_{20} \int_0^t \left[\frac{A_1 p'_{20}}{p_{20}} - \frac{A_2 p'_{10}}{p_{10}} \right] d s$$

と置いたものである。本式を積分すれば

$$q_1 = -p'_{10} \int_0^t \left[A_1(z) + \frac{h_{12} B(z)}{p'_{10}(z)} \right] \frac{p_{10}(z)}{p'_{10}(z)} d z \dots\dots\dots(16)$$

同様に

$$q_2 = -p'_{20} \int_0^t \left[A_2(z) - \frac{h_{21} B(z)}{p'_{20}(z)} \right] \frac{p_{20}(z)}{p'_{20}(z)} d z \dots\dots\dots(17)$$

これらの公式に依って第二近似式を計算し得る。今次の如く夫々式を置けば

$$P_{10} = \int_0^t p_{10}(s) d s \quad P_{20} = \int_0^t p_{20}(s) d s$$

$$B_{11}(z) = p_{10}(z) p_{20}(z) \int_0^z \frac{P_{10} p'_{10}}{p_{10}} d s$$

$$B_{21}(z) = p_{10}(z) p_{20}(z) \int_0^z \frac{P_{10} p'_{20}}{p_{20}} d s$$

$$B_{12}(z) = p_{10}(z) p_{20}(z) \int_0^z \frac{P_{20} p'_{20}}{p_{10}} d s$$

$$B_{22}(z) = p_{10}(z) p_{20}(z) \int_0^z \frac{P_{20} p'_{10}}{p_{20}} d s'$$

次の諸式を得る。

$$p_{21} = h_{21} p'_{20} \int_0^t \frac{p_{20}(z)}{p'_{20}{}^2(z)} B_{21}(z) d z, \quad p_{11} = \frac{p_{21} p'_{10}}{p'_{10}} - \frac{B_{21}(t)}{p'_{20}} \dots\dots\dots(18)$$

$$p_{22} = h_{21} p'_{20} \int_0^t \frac{p_{20}(z)}{p'_{20}{}^2(z)} B_{22}(z) d z, \quad p_{12} = \frac{p_{22} p'_{10}}{p'_{20}} - \frac{B_{22}(t)}{p'_{20}} \dots\dots\dots(19)$$

$$p_{13} = h_{12} p'_{10} \int_0^t \frac{p_{10}(z)}{p'_{10}{}^2(z)} B_{11}(z) d z, \quad p_{23} = \frac{p_{13} p'_{20}}{p'_{10}} - \frac{B_{11}(t)}{p'_{10}} \dots\dots\dots(20)$$

$$p_{14} = h_{12} p'_{10} \int_0^t \frac{p_{10}(z)}{p'_{10}(z)} B_{12}(z) dz, \quad p_{24} = \frac{p_{14} p'_{20}}{p'_{10}} - \frac{B_{12}(t)}{p'_{10}} \dots\dots\dots (21)$$

その他の近似式は同様に行って計算され得る。(18式より21式までは甚だ便利な形式ではないが、具体的な生物学的諸問題については如何なる場合に於いても、自然の併発現象は無視し得るものとするれば若干の質的結論が、これより抽出され得る。

第二例； 第一近似式は積分が可能であるからこれより続いて出て来る近似式の場合を考慮しよう。二種属は全く密接なものとすれば

$$h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

又(22式の展開が可能であるとすれば先づ近似式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} p'_{10} &= p_{10} (\epsilon_1 - h_{11} p_{10} - h_{12} p_{20}) \\ p'_{20} &= p_{20} (\epsilon_2 - h_{21} p_{10} - h_{22} p_{20}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

依って容易に次の関係を得る。

$$\frac{p_{10}^{h_{21}}}{a_1^{h_{21}}} = \frac{p_{20}^{h_{11}}}{a_2^{h_{11}}} \epsilon^{(\epsilon_1 h_{21} - \epsilon_2 h_{11}) t} \dots\dots\dots (24)$$

但し $a_1 a_2$ は $p_1 p_2$ の初値を示すものである。 $q_1 q_2$ を展開式(12の対応する函数の一对とすれば

$$\left. \begin{aligned} q'_1 &= \frac{q_1 p'_{10}}{p_{10}} - h_{11} p_{10} q_1 - h_{12} p_{10} q_2 - p_{10} A_1 \\ q'_2 &= \frac{q_2 p'_{20}}{p_{20}} - h_{21} p_{20} q_1 - h_{22} p_{20} q_2 - p_{20} A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

本式に於いて函数 $A_1 A_2$ は単に前に出た近似式に依存するものである。此等の方程式から

$$h_{21} \frac{d}{dt} \left(\frac{q_1}{p_{10}} \right) - h_{11} \frac{d}{dt} \left(\frac{q_2}{p_{20}} \right) = h_{11} A_2 - h_{21} A_1,$$

積分すれば本式は次の如くなる。

$$h_{21} \frac{q_1}{p_{10}} - h_{11} \frac{q_2}{p_{20}} = h_{11} \int_0^t A_2 ds - h_{21} \int_0^t A_1 ds \dots\dots\dots (26)$$

(25式と共に本式に依って $q_1 q_2$ の値を得るであろう。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= h_{10}(t) \int_0^t [p_{20}(z) C(z) h_{22} - A_1(z)] F(t_1 z) dz \\ q_2 &= p_{20}(t) \int_0^t [p_{10}(z) C(z) h_{21} + A_2(z)] F(t_1 z) dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

本式に於いて

$$C(z) = \frac{h_{11}}{h_{21}} \int_0^z A_2 ds - \int_0^z A_1 ds$$

$$F(t_1 z) = e^{h_{11} \int_0^z p_{10} ds + h_{22} \int_0^z p_{20} ds}$$

これらの諸式を利用して第二近似式を求めれば

$$\left. \begin{aligned} p_{21} &= h_{21} p_{20} \int_0^t F(t, z) p_{10}(z) dz \int_0^z P_{10} dS \\ p_{11} &= \frac{p_{10}}{h_{21}} \left[\frac{h_{11} p_{21}}{p_{20}} - h_{21} \int_0^t P_{10} dS \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 28$$

$$\left. \begin{aligned} p_{22} &= h_{21} p_{20} \int_0^t F(t, z) p_{10}(z) dz \int_0^z P_{20} dS \\ p_{12} &= \frac{p_{10}}{h_{21}} \left[\frac{h_{11} p_{22}}{p_{20}} - h_{21} \int_0^t P_{20} dS \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 29$$

$$\left. \begin{aligned} p_{13} &= h_{12} p_{10} \int_0^t F(t, z) p_{20}(z) dz \int_0^z P_{10} dS \\ p_{23} &= \frac{p_{20}}{h_{11}} \left[\frac{h_{21} p_{13}}{p_{10}} - h_{11} \int_0^t P_{10} dS \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 30$$

$$\left. \begin{aligned} p_{14} &= h_{12} p_{10} \int_0^t F(t, z) p_{20}(z) dz \int_0^z P_{20} dS \\ p_{24} &= \frac{p_{20}}{h_{11}} \left[\frac{h_{21} p_{14}}{p_{10}} - h_{11} \int_0^t P_{20} dS \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 31$$

比等の諸式は $h_{11} h_{12} h_{21} h_{22} \epsilon_1 \epsilon_2$ が正の時は函数 $p_{11} p_{12} p_{23} p_{24}$ は常に負で $p_{21} p_{22} p_{13} p_{14}$ は常に正である事を示すものである。これより直接に次の不等式を得る。

$$\left. \begin{aligned} p_{21} &< \frac{h_{21} p_{20}}{h_{11}} \int_0^t P_{10} dS & p_{22} &< \frac{h_{21} p_{20}}{h_{11}} \int_0^t P_{20} dS \\ p_{13} &< \frac{h_{11} p_{10}}{h_{21}} \int_0^t P_{10} dS & p_{14} &< \frac{h_{11} p_{10}}{h_{21}} \int_0^t P_{20} dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 32$$

これらの結果は通常平易な言葉で示され得るもので展開式(12)に於いては p_{10} 項は毒作用のない時の集団 p_1 の大きさを与え、 $c_{11} p_{11}$ 及び $c_{12} p_{12}$ 項は夫々 p_2 群の代謝産物によって起こる p_1 群の自家中毒作用を示すものである。依って自然にこれらの項は負である。一方 $c_{12} p_{13}$ 及び $c_{22} p_{14}$ はその近傍者の中毒作用に依って惹起せしめられるこの群の利益を示すものであって、これらの項は正となる。 p_2 群に関しても同様に推論し得る。32の不等式は比等の利益及び不利益に関して概略的の式を示すもので、 n 群の混合集団でも同様に取扱われ得る。

— 混合した細菌の集落 —

実験資料として、J Regnier の示した図式及び大腸菌及び葡萄状球菌より構成されている集団に関して、我々に参考資料が送られてきた。純粋培養に関する Regnier の資料は既に使用したので、更に追加して、混合培養によって研究された結果を述べてみよう。質的観点より見れば Regnier の図式は一理論を確立するものである。 p_1 を大腸菌の数 p_2 を葡萄状球菌の数とし比等は混合培養液に於いて行ふものとする。生活係数の値を使用するに當って純粋培養より計算されたものは次の如くである。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1.14 & h_{11} &= 0.0003 & c_{11} &= 0.023 \\ \epsilon_2 &= 1.05 & h_{12} &= 0.0002 & c_{22} &= 0.0265 \end{aligned}$$

依って内的作用の係数 $h_{12} \sim 0.00005$ $h_{21} \sim 0.00014$ を計算する事が出来るが、平均値周辺の散

布状態は極めて広大である。これらの値の示す処は凡ゆる場合に於いて、共存生活に於いては大腸菌より葡萄状球菌の方がはるかに苦痛である事である。集落 p_2 に於ける極めて速かな減少は、大腸菌の葡萄状球菌に及す毒作用が後者の前者に与える毒作用より更に大きい事を示すものであるが、この瞬間に対して残存作用の係数を何等かの方法で正確に計算する事は不可能である。

第九章 種属間関係 (続)

1. 同一食料を得んとする二種属の闘争

同一のしかも十分に豊富な食料を求めて闘争する二種属 p_1 及び p_2 より成る一集団を考慮して見よう。競争者間の各遭遇は多少とも一争闘をひき起こすか又は相互にある不利益を齎すかの何れかである。前章の理論を繰り反せば次式の如くである。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \varepsilon_1 p_1 - h_{11} p_1^2 - h_{12} p_1 p_2 \\ p_2' &= \varepsilon_2 p_2 - h_{21} p_1 p_2 - h_{22} p_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

二種属は互いに他のものが居なければ甚だ都合なのであるから $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ は正である。又凡ゆる場合に於いて各個体間の闘争は該団体にとって正味の損失となる事を考えれば係数 $h_{11} h_{12} h_{21} h_{22}$ は正である。この式は V. Volterra 及び A J Lotka によって研究されたものであって、Volterra は二争闘は生物学的には広く分ける事は出来ず、極限係数は次式によって関係付けられたものと仮定したのである。

$$h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

この仮定は、闘争と言う見地から見れば、二つの部分集団 $p_1 p_2$ は想像的に $\eta_1 p_1 + \eta_2 p_2$ 集団によって置換される事が出来ると言う事を示しているものである。この様な状態の下に(1)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \varepsilon_1 p_1 - k_1 p_1 (\eta_1 p_1 + \eta_2 p_2) \\ p_2' &= \varepsilon_2 p_2 - k_2 p_2 (\eta_1 p_1 + \eta_2 p_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

本仮定は後章に於いて論議されて居るが、(3)式は積分されて次の如くなる。

$$\frac{p_1^{k_2}}{p_2^{k_1}} = \frac{a_1^{k_2}}{a_2^{k_1}} e^{(\varepsilon_1 k_2 - \varepsilon_2 k_1) t} \dots\dots\dots(4)$$

但し $a_1 a_2$ は二群の原数である。比処で二通りに考えられる。若し $\varepsilon_1 k_2 > \varepsilon_2 k_1$ であれば第一種属は第二種属より遙に著しい利益を有し、その極限に於いては

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\varepsilon_1}{k_1 \eta_1} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0$$

逆に $\varepsilon_1 k_2 < \varepsilon_2 k_1$ であれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{\varepsilon_2}{k_2 \eta_2} \text{ となる。}$$

結局 $\varepsilon_1 k_2 = \varepsilon_2 k_1$ の最も起りそうもない場合に於いても、二群の係数は存在し得るものである。かくて、Volterra の仮定に依れば、二群間の平衡は一般に不可能であって、最も小なる不利益でも、当該群の消失を導くものである。Lotkaは極限係数に関して条件(2)を設ける事なく一般方法によって

(1)式を研究した。(1)式は(3)式程、容易には積分されないけれども、夫等の解答に関して、一般性質を指摘する事は可能である。即ち次の如くである。

第一の場合に於いて生活係数は次の不等式を満足する。

$$\epsilon_1 h_{22} > \epsilon_2 h_{12} \quad \epsilon_1 h_{21} < \epsilon_2 h_{11} \quad \dots\dots\dots(5)$$

これは二種属に対して平等に利益又は不利益を与えるものである。この時二群は極限安定状態へと向う。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\epsilon_1 h_{22} - \epsilon_1 h_{12}}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{\epsilon_2 h_{11} - \epsilon_1 h_{21}}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}} \quad \dots\dots\dots(6)$$

第二の場合に於いては次の不等式を満足する。

$$\epsilon_1 h_{22} > \epsilon_2 h_{12}, \quad \epsilon_1 h_{21} > \epsilon_2 h_{11} \quad \dots\dots\dots(7)$$

第一種属に完全に好都合である故に次式の如く生残する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\epsilon_1}{h_{11}} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

第三の場合に於いては、反対に

$$\epsilon_1 h_{22} < \epsilon_2 h_{12}, \quad \epsilon_1 h_{21} < \epsilon_2 h_{11} \quad \dots\dots\dots(9)$$

で、第二種属に都合宜く、生残する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{\epsilon_2}{h_{22}} \quad \dots\dots\dots(10)$$

第四の場合の不等式は次の如く

$$\epsilon_1 h_{22} < \epsilon_1 h_{12} \quad \epsilon_1 h_{21} > \epsilon_2 h_{11} \quad \dots\dots\dots(11)$$

(5)の反対である。本例では更に複雑で、二闘争群中の一群はそれが経過して行く中に絶滅に終り、他群は(8)又は(10)の何れかの式に依って決定される極限安定状態へと向うものである。

本系統の一つ又は他の結果へと向う傾向は原値 $a_1 a_2$ に依存する。広く言えば極めて数の多い群だけが、終局に於いて生存し得ると言う事が出来る。生物学的見地から眺めれば此等の結果は甚だ興味のあるもので、同一食料を求めて闘争する二種属間の平衡は可能であるが、この確率は起り得可き凡ての場合を予想しても単にその四分の一に過ぎない。(5)式より、本例に於いては $h_{11} h_{22} > h_{12} h_{21}$ であるからこれより、二群間の闘争は彼等の内部的闘争は激しくないのである。この逆の現象は二群が同盟している種属の場合に起こり得る。

我々は今や注意を生活係数及び環境に向けなければならない。二種属は甚だ異った条件の下でも極めて多岐に亘る状態に於いて共に生活し得ている二群間の平衡確率は単に 0.25 であって、一方夫等の中一群の消滅確率が 0.75 の時は生活係数は偶然と言うものによって淘汰された数であると見なされる。更に他の群が存在している時は平衡確率は減少する。尚、生活係数は凡て独立なものではない。死亡率の増加は殆んど常に、極限係数に於ける増加によって伴われるものである。したがって関連群の共存機会は甚だ小で、一般に自然淘汰の影響は諸群の差異を更に過大にする。本結果は、雑種の生存を

現出せしめる諸群に対して、真理であり得る事は後に到って了解するであらう。

2 二種属が他の一種属を捕食する場合の三種属

前節に於いて行ったものは、供給食料が豊富で、消費者の存在には無関係であると仮定したものであった。本例がこの様な場合ではないものとすれば、第三の方程式を附加す可きである。 $p_1 p_2$ を二種属捕食者群の総数又は生物量とし、 n を餌食者群の総量とする。微分方程式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (-\varepsilon_1 + s_1 n - h_{11} p_1 - h_{12} p_2) \\ p_2' &= p_2 (-\varepsilon_2 + s_2 n - h_{21} p_1 - h_{22} p_2) \\ p_1' &= n (\varepsilon - \sigma_1 p_1 - \sigma_2 p_2 - h n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

本式に於いて $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ は(1)式の係数のそれと同じものでない事は注意を要する。此等は餌食群が居ない時は捕食者の負の増加を示すに到るものである。簡略して次の記号を用いよう。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= h (h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}) + s_2 (h_{11} \sigma_2 - h_{12} \sigma_1) \\ &\quad - s_1 (h_{21} \sigma_2 - h_{22} \sigma_1) \\ E_1 &= -\varepsilon_1 (h h_{22} + \sigma_2 s_2) + \varepsilon_2 (h h_{12} - \sigma_2 s_1) \\ &\quad + \varepsilon (-h_{12} s_2 + h_{22} s_1) \\ E_2 &= \varepsilon_1 (h h_{21} + \sigma_1 s_2) - \varepsilon_2 (h h_{11} + \sigma_1 s_1) \\ &\quad - \varepsilon (-h_{11} s_2 + h_{21} s_1) \\ E &= -\varepsilon_1 (h_{21} \sigma_2 - h_{22} \sigma_1) + \varepsilon_2 (h_{11} \sigma_2 - h_{12} \sigma_1) \\ &\quad + \varepsilon (h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

以上の諸式は次の式を満足するものである。

$$\left. \begin{aligned} E_1 (h h_{11} + \sigma_1 s_1) + E_2 (h h_{12} + \sigma_2 s_1) &= (\varepsilon s_1 - h \varepsilon_1) \Delta \\ E_1 (h h_{21} + \sigma_1 s_2) + E_2 (h h_{22} + \sigma_2 s_2) &= (\varepsilon s_2 - h \varepsilon_2) \Delta \\ E_1 (h_{11} \varepsilon + \sigma_1 \varepsilon_1) + E_2 (h_{12} \varepsilon + \sigma_2 \varepsilon_1) &= (\varepsilon s_1 - h \varepsilon_1) E \\ E_1 (h_{21} \varepsilon + \sigma_1 \varepsilon_2) + E_2 (h_{22} \varepsilon + \sigma_2 \varepsilon_2) &= (\varepsilon s_2 - h \varepsilon_2) E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

本例では五つの安定的平衡の場合が区別される。即ち本系統の方向に五つの可能性があるのである。

(1) 第一方向

$$\left. \begin{aligned} E_1 > 0 \quad E_2 > 0 \\ \varepsilon s_1 - h \varepsilon_1 > 0 \quad \varepsilon s_2 - h \varepsilon_2 > 0 \quad h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

であるとするれば $\Delta > 0 \quad E > 0$ である。

この仮定は、形勢が捕食二種属群に有利なものであるが、二群中何れも他に対しては特別な利益を持っていると言うことではない。この場合、三群間の安定的な平衡は成立が可能で、次の極限值を得る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{E_1}{\Delta} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{E_2}{\Delta} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n = \frac{E}{\Delta} \quad \dots\dots\dots(16)$$

本極限は何等変動なくして達せられるものである。

(2) 第二方向

次は逆に、形勢が何れの種属にも有利でない場合である。即ち

$$\varepsilon s_1 - h \varepsilon_1 < 0 \quad \varepsilon s_2 - h \varepsilon_2 < 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

とすれば、捕食者群は消滅し、餌食者群は増加して、飽和点に達する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n = \frac{\varepsilon}{n} \quad \dots\dots\dots(18)$$

(3) 第三方向

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon s_1 - \varepsilon_1 h > 0 \quad E_2 < 0 \\ \varepsilon s_2 - \varepsilon_2 h < 0 \quad E_1 > 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

とすれば第一種属群は明らかに有利で、終には生存し、餌食者群と平衡状態に到るが、第二種属群は死滅する。即ち結局次の極限值を得る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\varepsilon s_1 - \varepsilon_1 h}{h h_{11} + \sigma_1 s_1}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n = \frac{\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon h_{11}}{h h_{11} + \sigma_1 s_1} \quad \dots\dots\dots(20)$$

(4) 第四方向

本例では第二捕食者群が有利で、次式を得る。

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon s_2 - \varepsilon_2 h > 0 \quad E_1 < 0 \\ \varepsilon s_1 - \varepsilon_1 h < 0 \quad E_2 > 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

本式の極限に於いては次の如くである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{\varepsilon s_2 - \varepsilon_2 h}{h h_{22} + \sigma_2 s_2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n = \frac{\varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon h_{22}}{h h_{22} + \sigma_2 s_2} \quad \dots\dots\dots(22)$$

(5) 第五方向

本例では次の不等式を有する。

$$E_1 < 0, \quad E_2 < 0, \quad \varepsilon s_1 - h \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon s_2 - h \varepsilon_2 > 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

これは部分的に見れば(19)式の逆である。凡ては、その初期の値 $p_1(0)$ $p_2(0)$ $n(0)$ に関係しているので、本系統は(20)式の値に向うか又は(22)式の値に向うか何れかに移動する。これらの結果を前節のそれと比較すると、食料の性質に於ける変異は、二種属間平衡の機会を効果的に軽減させているのを見る。前節の式は最適の条件下に適用されたものであるが、一方(12)式は食料供給に於いて偶発的の変化を斟酌している。故に(16)式によって示された平衡確率は前節(6)式に依って示されているものより小さい。又他方(17)の不等式に依れば捕食者群が死滅する確率は0.25に達しているが前節に於いては0であった。

3. 一種属が他種属を捕食する場合の二種属群、Volterraの生物学的法則

第一種属 p_1 は豊富な食料に接近し、第二種属 p_2 の存在には無関係であるが p_2 群は捕食者であ

って、唯 p_1 種属をのみ食すると言う二種属群について考慮して見よう。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (\varepsilon_1 - h_{11}p_2 - h_{12}p_2) \\ p_2' &= p_2 (-\varepsilon_2 + h_{21}p_1 - h_{22}p_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 24$$

本式は此等種属間の関係を示したもので消費者群の増加率に及ぼす食料の影響を決定する為に捕食者群の観点より考慮されたものである。更に二乗項目が欠如している特別な場合では、24式は有機界の動物と植物との分野に於ける関係を示したものである。これらの方程式が再び考慮されたのは、生活係数に於いて、二要素の数的発展に及ぼす急速な変異の影響を研究する為に外ならない。先づ餌食、捕食両群何れでも何等内的闘争はないものとする。即ち、

$$h_{11} = 0 \quad h_{22} = 0 \quad \text{である。}$$

これは Volterra の循環例であって、

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (\varepsilon_1 - h_{12}p_2) \\ p_2' &= p_2 (-\varepsilon_2 - h_{21}p_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 25$$

これは両集団 $p_1 p_2$ の低い密度に相当するものである。積分式を先づ次の如く書く。

$$p_1^{\varepsilon_2} p_2^{\varepsilon_1} e^{-h_{21}p_1 - h_{12}p_2} = H \dots\dots\dots 26$$

本式は屢々記載されたものである。次に、

$$\begin{aligned} h_{21}p_1' &= \varepsilon_1 h_{21}p_1 - h_{12}h_{21}p_1 p_2 \\ h_{12}p_2' &= -\varepsilon_2 h_{12}p_2 + h_{12}h_{21}p_1 p_2 \\ -\varepsilon_2 \frac{p_1'}{p_1} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 h_{12}p_2 \\ -\varepsilon_1 \frac{p_2'}{p_2} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 h_{21}p_1 \end{aligned}$$

これらの式を加えれば次式を得る。

$$h_{21}p_1' + h_{12}p_2' - \varepsilon_2 \frac{p_1'}{p_1} - \varepsilon_1 \frac{p_2'}{p_2} = 0$$

本式を直接積分すれば26式を得るものである。Hは積分常数で

$$H = a_1^{\varepsilon_2} a_2^{\varepsilon_1} e^{-h_{21}a_1 - h_{12}a_2} \dots\dots\dots 27$$

但し $a_1 = p_1(0)$ $a_2 = p_2(0)$

($p_1 p_2$) の図表に於いては、曲線26は閉じた曲線で、交点はない(第四図)。故に函数 $p_1(t)$ $p_2(t)$ は周期的で、 w の周期を有する。

$$p_1(t+w) = p_1(t) \quad p_2(t+w) = p_2(t)$$

本周期性は、週期的循環法則の名の下に、Volterra によって明確に陳述された最初の生物学的法則の問題である。この外に知られる事は、閉括曲線26が示す共通中心の座標は、週期 w 期間に於いて二種属の各個体数の平均に等しい事である。

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{w} \int_t^{t+w} p_1 dt = \frac{\epsilon_2}{h_{21}}, \quad \bar{p}_2 = \frac{1}{w} \int_t^{t+w} p_2 dt = \frac{\epsilon_1}{h_{12}} \dots\dots\dots (28)$$

この事実は、Volterra の第二生物法則の問題で、平均保存の法則である。これらの事実を回想すれば我々は Volterra の第三生物法則に到るであろう。ある原因の為に、二種属の死亡率が増加したとする。(28)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (\epsilon_1 - \theta_2 - h_{12} p_2) \\ p_2' &= p_2 (-\epsilon_2 - \theta_2 + h_{21} p_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

本式に於いて、 $\theta_1 < \epsilon_1$ 及び θ_2 は補助死亡率である。 w_1 を修正式の該周期とすれば(29)式は次の如くなる

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{w_1} \int_t^{t+w_1} p_1 dt &= \frac{\epsilon_2 + \theta_2}{h_{12}} \\ \frac{1}{w_2} \int_t^{t+w_2} p_2 dt &= \frac{\epsilon_1 - \theta_1}{h_{21}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

Volterra はこれらの関係式に平均攪乱の法則と言う名を与えた。明らかに、餌食群の補助死亡率は捕食群の平均数の減少を結果する。同様に捕食群の補助死亡率は、餌食群の数に於ける増加となって結果する。これら諸法則の実験的証明と言う事は(29)式で示すような型に相当している。だが週期的変動と言うものが未だ観察されておらないので極めて困難である。多くの週期的実例に於いて見られる現象は弛緩週期であって、この機構は(29)式とは甚だ異ったものなのである。Volterra の法則は弛緩週期には適用されない。故に、夫々個々に、直接に確認する事が極めて大切な事である。魚類に関する統計的研究によれば正確に、捕食群の死亡率の増加を来している。そして餌食群へ間接的に影響を与えている事を示している。これは Volterra の第三法則を確認するものである。Gause の原虫類、だに等に関する実験は極めて稀にのみ(30)式にも比す可き閉括曲線を与えた。ぞうり虫の一種 (Paramecium bursaria) を捕食群とし、糖菌虫類 (Saccharomyces exiguns) を餌食群とする一集団の場合に於いては、人工的に本集団を稀薄ならしめる事に依って Volterra の循環に似た曲線を得る事が出来るのであるが、この方法に於いて Gause は三つの連続循環を得るのに成功したのである。真に週期的な場合の原因として極めて稀有なものの一つは、二乗項目の存在で、これらの項目に依って示される極限作用は常に存し、特に捕食群に於いて甚しい。最も正確に、 $(p_1 p_2)$ 系統の発展を示すものは(29)式である。既に試みた甚だ異った二つの場合がある。第一は、 $\epsilon_2 h_{11} < \epsilon_1 h_{21}$ で、両種属にとって等しく好都合な場合である。この意味する処は餌食群にとって増加率 ϵ_1 は甚だ急速であるため捕食群にとってはこれを食いつぶすことが出来ない。捕食群にとっては、数的減少 ϵ_2 は獲得物に比べて比較的小さい。かくて、結果として、二種属間に一平衡が存する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\epsilon_1 h_{22} + \epsilon_2 h_{12}}{h_{11} h_{22} + h_{21} h_{12}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{\epsilon_1 h_{21} - \epsilon_2 h_{11}}{h_{11} h_{22} + h_{21} h_{12}} \dots\dots\dots (31)$$

依って

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 > \frac{\epsilon_2}{h_{21}} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 < \frac{\epsilon_1}{h_{12}} \dots\dots\dots (32)$$

即ち極限要因の作用は餌食群に有利で、捕食群に不利である。 $h_{11} h_{22}$ が十分小さい時は、函数 $p_1 p_2$

は、内抵抗のある機械系統の函数と正確に軌を一にしたものとなり、減少振動を通過して、(3)式の極限に向うものである。極限要因と内的摩擦との間にこのような類似性があると言う事は甚だ興味のある事と言う可きである。第七章で既に使用した動態と言う言葉で、該章(2)式の $-a_{11} p p'$ は綿密に、集団及びその増加速度に比例する処の内的抵抗を示しているものである。他面 $h_{11} h_{22}$ が大きい時は、函数 $p_1 p_2$ は振動を行う事なく、(3)式の極限に向うものである。第二は、 $\epsilon_2 h_{11} > \epsilon_1 h_{21}$ の場合であつて捕食群に不利である為に第一種属が飽和点に向う間に、これらは消滅するものである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\epsilon_1}{h_{11}} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0$$

此等の単純な結果は、実験と一致しているように思われる。結局安定状態(3)は極めて稀にのみ観察されるものということになる。このような不一致の原因中には餌食群の異つた年齢相及び此等年齢群の一又は数群に対して、捕食群の偏食と言う好み等があげられよう。

— 餌食群年齢相の効果 —

捕食群によって攻撃されるものは主として、成年年齢群で、若年齢群は夫等のより小さい形、夫等の風味、又は異つた環境に生活している事等の何れかの原因によって、比較的によく保護されるものとすれば、この場合は容易に式で示される。 x_1 を餌食成年群の数、 x_2 を若年齢群の数、 p を捕食群の数とする。

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= -m x_1 + \alpha x_2 - h_{13} x_1 p \\ x_2' &= n x_1 - (m + \alpha) x_2 \\ p' &= -\epsilon p + h_{31} p x_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

本式は(2)式の代りに用いられるもので、 αx_2 項は成年層へと成長する若年齢群の数を表し、 $n x_1$ は成年群の数に比例した出生率を示すものである。安定的固定状態は次式の如くである。

$$x_1 = \frac{\epsilon}{h_{31}}, \quad x_2 = \frac{n \epsilon}{(m + \alpha) h_{31}}, \quad p = \frac{\alpha n - m^2 - m \alpha}{h_{13} (m + \alpha)} \dots\dots\dots (4)$$

本状態は、多産率 n 、及び若年齢群の十分な生残率 α によって餌食群より逃れるとすれば成立するもので、斯の αn の条件は次の不等式によって表し得るものである。

$$\alpha n > m (m + \alpha)$$

一方捕食群の死亡率が甚だ大であれば

$$\epsilon > \frac{(m + \alpha) (\alpha n - m^2 - m \alpha)}{\alpha^2 n^2}$$

となり、固定状態は焦点一点に絞られる。換言すれば本系列は Volterra の循環によく似た減衰振動の無限系列を通過する。究極に於いて餌食群の死亡率が過大に到れば、 $m (m + \alpha) > \alpha n$ となり、二種属は終わりに消滅する。依つて(2)式が循環する場合の代りに此処に使用した(3)式が働らき将来にとってはそれ程有利ではない。餌食群の異つた年齢層の影響は何れかの種属に対して生残率の低下を来たすことになる。

— 異種捕食群 —

更に原因を加えると単純循環曲線又は終極平衡を複雑にする。特に捕食種属に於いて複雑である。

本種属は異った大いさの二形より成るもので、もし食料 p_1 が豊富であれば二種属は共存し、食料が不十分であれば小さな形の種属の方が有利である。即ち矮小形のは、それ程食料を必要としないし、又隠蔽個所にいる餌食群を捕えるのに便利である。したがってきびしく他から攻撃される事が少なかった餌食群は増加し、そこで今度は巨大形の捕食群に好都合な状況が再現されることになる。この事実は Volterra の変動と甚だ異った種類の振動を生じ、これは Gause の一実験に於いて起った事実である。二種属は他の諸性質に於いても異ったものである事は改めて言うまでもない事である。

— Didinium Nasutum Paramecium Caudatum —

Gause の本実験に於いては、集団は原虫動物の二種より成り一種は Didinium Nasutum で、他の一種 Paramecium Caudatum を食するものである。

訳注： Didinium は原生動物で全毛類の第 2 目裸口類に属し、好んでぞうり虫を捕食するものである。Paramecium も原生動物で全毛類に属し、第 3 目の毛口類に入る。

攻撃の兇暴性は著しく、凡て Gause の実験に於いては結果は同一であった。Didinium は速に、Paramecium を撲滅し、後餓死した。この結果は 23 式によっても又更に一般化した 24 式によっても何れでも豫示されなかった。後者の場合には我々は二型の平衡型を有したのであったが、何れも事実と一致しない。こうした齟齬はどう説明したらよいか？ 再び 24 式に立ち帰って論じて見よう。 $h_{12} p_1 p_2$ 及び $h_{21} p_1 p_2$ 項は二種属間の相互作用を示し、遭遇数が比較的小さい時に限り工合がよいが、大であると此等の相互作用は最早以上のようには表現されない。単純な事例に依れば 24 式が適用されるように補正も出来る。もしこれが同種属の雌雄間の会合問題であれば、この会合数は p^2 に比例し出生率は二乗項によって示される筈である。然し現在は事実第一次の項に依って示され、単位時間に於ける出生数は集団に比例して、集団の平方には比例していない。そこで会合が過度に頻繁であれば、統計的方法是二乗項の代りに第一次の項を導入するのであろう。本節では、Didinium が Paramecium を追求し攻撃し得る。この特別な勢力は同じ結果を導くに到り、24 式は次式によって置換されることになる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - \mu_1 p_2 - h_{11} p_1^2 - h_{12} p_1 p_2 \\ p_2' &= -\epsilon_2 p_2 + \mu_2 p_2 + h_{21} p_1 p_2 - h_{22} p_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

これは餌食群が存在する限り存続するであろう。循環する場合でも同様に補正すれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - \mu_1 p_2 - h_{12} p_1 p_2 \\ p_2' &= -p_2 (\epsilon_2 - \mu_2) + h_{21} p_1 p_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

従って、 $\epsilon_2 > \mu_2$ の時は餌食群に対して減少極限を得る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{\epsilon_2 - \mu_2}{h_{21}} < \frac{\epsilon_2}{h_{21}}$$

そして変異の不連続性の影響は餌食群の消滅を来し、これには生物学的方程式が与えられない。Gause は豫期することの出来ない結果に到る或る変態が Didinium にある事を注意した。もし餌食群の集団密度がある限界下に低下すれば、形の大いさに於ける差は小さな Didinium に対して有利となる。大きな捕食群は小さなものよりも速に消滅し、この環境は時には小さい Didinium を破滅から救う。実験的条件下では、適当な隠蔽所がない場合は最後の Paramecium は彼等の小さい敵の最後のものの為に急速に撲滅されて全集団は終わりに消滅する。然し自然界では隠蔽所が欠乏すると言う事は考えられない。故に、この現象は起らないで、その結果は又異ったものとなるであろう。

Gause は自然的の条件を再現する事に努め、Paramecium に、捕食群が接近しないような避難場所を与えたのであるが、期待した結果は得られなかった。この理由は、Paramecium は避難場所から離れず、捕食群は餓滅した事に依るものである。比較的安定した集団を得る唯一の方法は、二群を補うのに、規則的な間隔において適当量を附加する事である。こうして Gause は望ましい結果を得たのであった。此等の結果を完成する為に Gause は興味のある統計的実験に着手した。彼は 30 個の同じような管内に夫々 5 匹の Paramecium 及び 3 匹の Didinium を置いて 2 日後に之を検査した処、4 管内の捕食群は死し 26 管内では Paramecium の数が 2 匹より 38 匹まである混合集団であった。別の同様な実験に於いては、6 日目に之を検査して 25 管中 17 管に混合集団を見たのである。本結果に依っても現象は頗る複雑であって、この小社会の一つでも理論と一致する分布は、事が理論に関する限り何たるを問わず、有利或は不利の証拠としては使用する事が出来ないことが分った。

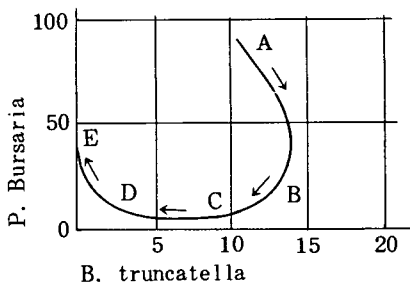
— Bursaria truncatella ; Paramecium bursaria —

Gause の別の実験は於いては、Bursaria truncatella を捕食群とし、Paramecium bursaria を餌食群として之を行ったものである。

訳注： Bursaria は原生動物の第 2 綱螺旋毛類に入り第 2 目の異毛類に属する。

此の餌食群は規則的に供給される酵母によって培養されたものである。大きさに差がある為、捕食群は凡ての Paramecium を撲滅するに成功せず、

第九図 混合集団の比較増加, Gause による
B. truncatella P. bursaria



これらの食料が不足し始めるや否や急速に死滅する。次に捕食群が不在の時は、Paramecium は通常の仕方でも増殖したのである。(第九図) 若し事実に応じて変化するように生活係数を作成すれば、この過程は数学的解説にかなり好都合で生物学的変異の不連続性と言う結果が観取されるのである。出発点 A (第九随参照) より B に到るまでの過程は (24) 又は (25) 式により規定されるもので、B 点より、食料の不足が認められ、捕食群中若干のものは捕促する機会があるのであるが、これら若干の餌食

では全群に対して十分でない。此の瞬間から係数 h_{21} h_{12} は急速に減少して、凡そ C 点の近傍に於いては消失する。或は換言すれば最終の生残 Paramecium は最早捕食群によっては脅威されないと言う事である。以後 (24) (25) 式は次式によって置換することが出来る。

$$\frac{d p_1}{d t} = p_1 (\epsilon_1 - h_{11} p_1), \quad \frac{d p_2}{d t} = - p_2 (\epsilon_2 + h_{22} p_2)$$

D 点に到れば最早捕食群は存在しない。事実夫等の数はある限界下に低下するや否や、彼等は消滅している。以後 Paramecium の発展は正常に存続する。

— Cheyletus eruditus ; Aleuroglyphus agilis —

更にしらみ類の場合、Gause 及び Smaragdova に依って研究された Cheyletus eruditus (捕食群)

訳注： Cheyletus は節足動物のくも類に入り、この第 5 目のツメダニ科のものである。

Aleuroglyphus も節足動物で昆虫類の第 1 亜綱の無翅類に入るコナシラミ科である。

Aleuroglyphus agilis (餌食科) を考慮して見よう。此処に於いては新要因が現出している。即ち代謝産物の効果である。本要因は明らかに逆説の場合であって、密度の低い餌食集団中に放たれた。

Cheyletus はこの状態に自身を馴致させて或種の循環過程を形作った。同様にこれらを稠密なる餌食群に放てば、食料の豊富な事は一見甚だ好都合であろうと思われるのに、事實は急速に死滅した。この場合又方程式によって本現象を示す事が出来る。

Gause に依れば餌食群の放つ臭気は捕食群にとって耐え難いものであると言う。とに角、周囲の大气が呼吸するに適當であれば、Aleuroglyphus の臭気は何等捕食群にとって妨げとはならぬものであるが、餌食群の各個体別の怠惰臭が、居住空間を充たすに及んでは、これらを攻撃しようとする希望は滅殺されるようである。考えて見ると本例では毒産物蓄積の問題ではなくて、呼吸す可き空氣の緩衝層がない為であろう。 p_1 を餌食群の密度、 p_2 を捕食群の密度、 π_1 を捕食群に対して呼吸に適する条件と適しない条件との間に於いて一線を劃する p_1 の値とする。経過は次式に依って示され得る。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (\varepsilon_1 - h_{11}p_1 - h_{12}p_2) \\ p_2' &= p_2 (-\varepsilon_2 + h_{21}p_1 - h_{22}p_2) \end{aligned} \right\} (p_1 < \pi_1) \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (\varepsilon_1 - h_{11}p_1) \\ p_2' &= -E_2 p_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

E_2 は呼吸の出来得ないような大气中での捕食群の死亡率の増加を示すものである。 $p_1 = \pi_1$ は凶式 ($p_1 p_2$) を二区域に分けて、これら種属間の生存競争の結果は二集団の原数に依存する。広く言えば、(37)(38)式は Gause 及び Smaragdova の観察に関して解説を与えるものである。

多くの場合 Volterra の方程式は現象を説明するには十分であるが、生活係数が突如的又は漸次的に変化するような場合を考えなかつた。したがってこのような単純公式では自然経過を表す事は出来ない。

4. 狼—山羊—野菜

環状関係にある若干種の集団で、各一環が同時に捕食群ともなり餌食群ともなるような例は珍らしくない。本種類のような集団の一例は、巨大な肉食性爬虫類及び哺乳動物の棲む Malaya の Komodo 島にある。即ち後者は前者の餌食群で、又本島の豊富な植物を食する捕食群でもある。この生物学的系統の微分方程式を書くに當って、鬭争は植物の間に於いてのみ存し、爬虫類の存在は植物には何等直接的の影響がないものとする。 p_1 を哺乳動物、 p_2 を爬虫類、 p_3 を植物の総量とすれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_1 (-\varepsilon_1 - h_{12}p_2 + h_{13}p_3) \\ p_2' &= p_2 (-\varepsilon_2 + h_{21}p_1) \\ p_3' &= p_3 (\varepsilon_3 - h_{31}p_1 - h_{33}p_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

三つの異った場合がある。

(1) 第一の場合

$$\varepsilon_3 h_{13} h_{21} - \varepsilon_2 h_{13} h_{31} - \varepsilon_1 h_{21} h_{33} > 0 \dots\dots\dots (40)$$

とすれば安定的平衡は次の極限值を有する事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p_1 &= \frac{\varepsilon_2}{h_{21}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 &= \frac{\varepsilon_3 h_{13} h_{21} - \varepsilon_2 h_{13} h_{31} - \varepsilon_1 h_{21} h_{33}}{h_{12} h_{21} h_{33}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 &= \frac{\varepsilon_3 h_{21} - \varepsilon_2 h_{31}}{h_{21} h_{33}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

極限に行く方法は動揺したり又は漸近的になされるであろう。この二つの場合を区別出来るということではないが係数 h_{31} が十分小さい時は、変動が起こると言うことは言える。

(2) 第二の場合

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_3 h_{13} h_{21} - \varepsilon_2 h_{13} h_{31} - \varepsilon_1 h_{21} h_{33} < 0 \\ \varepsilon_3 h_{13} - \varepsilon_1 h_{33} > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

この場合植物によって、吸収される食料は、無数とまでは行かないまでもある程度の哺乳動物の存在の安定には十分で、爬虫類を支えるには不十分である。こうして次の極限值を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p_1 &= \frac{\varepsilon_3 h_{13} - \varepsilon_1 h_{33}}{h_{13} h_{31}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 &= \frac{\varepsilon_1}{h_{13}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

換言すれば、爬虫類は死滅し、残余の集団 ($p_1 p_3$) は安定的な極限状態に向う。

(3) 第三の場合

この場合は

$$\varepsilon_3 h_{13} - \varepsilon_1 h_{33} < 0 \dots\dots\dots (44)$$

で、植物の供給する食料では哺乳動物を養うに十分でなく、そこで

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 = \frac{\varepsilon_3}{h_{33}} \dots\dots\dots (45)$$

こうして凡ての動物は消滅し、残った植物集団のみが最大にまで発展する。

これらの結果に関する確率はどうか？ (40)式の符号より判断するのに、三群間平衡の確率は0.5に等しく、各々二つのものと他のものとの確率は共に0.5に等しい、これは自然に於ける三系統の平衡について比較的の頻度を説明するが、Komodo島以外の凡て他の地域の爬虫類の消滅に関しては何等理由を与えるものではない。これの意味する処は、この特別の場合の確率評価は正確でない事であって、事実本論議に於いては、必ずしも真でない生活係数の相互独立性を暗々裡に仮定しているものである。一方新要因の出現は殆んど常に、一系統の平衡にとって都合の悪いものである。

第十章 共棲生活と寄生生活

1. 共棲生活

共棲、寄生と言う両現象はそれ自体でも興味のある重要なものであるが、種属進化の機構及び器官の発達に関しては更により理解を我々に与える。凡て生活体を細胞の共同生活の実例であると考え若干の秀れた生物学者 Famintjine, Merejkovski, Portier がいる。例えば多細胞器官の共同生活の起源というものを否定することは難しい。最初は偶然であった二種属の交際が次第に親密になったのであろう。このような結合程度には、いろいろあり、すぐ分かれてしまうような薄い関係からもっと密接な関係もある。又事実密着した統一体のものまである。有名なのは藓苔類である。実験的条件の下では猶、分離可能なものもある事は明らかであるが、この条件は自然環境とは何等共通的なものを持ってはいない。しかし、この問題は方程式の形で置く事が出来るのであるがその意図する処は数的結果を得ようとするのではなく、ある値を有して居るかも知れない質的結論を希望するのである。この方程式に関しては二個の基本的な形式が考慮される。

— 単純構造群 —

殆んど年齢に無関係な生活係数を持つ単純構造の二種属の場合を先づ採用し、 $x_1 x_2$ を終わりには共棲生活を営む二種属の各個別の数とし、 x を共棲した共同一対体の数、 $n_1 n_2$ を自由離存の状態に於ける繁殖率、 $v_1 v_2$ を共棲状態の繁殖率、 $m_1 m_2$ を離存状態の死亡率、 $\mu_1 \mu_2$ を共棲状態に於ける死亡率とする。ある数の一対 v は生まれ乍ら既に共棲しているものとし、共棲一対補助死亡率 μ は特殊な死亡率として考えて見る。だがある場合では、一方が死んでも他方が死なない事もある。第一次の項を与える此等要因の外に、各個体間の遭遇が考慮されなければならない。単位時間に $\alpha x_1 x_2$ 対を生ずるとする。究意の極限要因も又考慮しなければならない。此等の条件の下に、次の微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon_1 x_1 + (v_1 - v + \beta_1) x - h_{11} x_1^2 - h_{13} x_1 x - \alpha x_1 x_2 \\ x'_2 &= \varepsilon_2 x_2 + (v_2 - v + \beta_2) x - h_{22} x_2^2 - h_{33} x_2 x - \alpha x_1 x_2 \\ x'_1 &= (v - \mu_1 - \mu_2 - \mu) x - h_{33} x^2 - h_{31} x_1 x - h_{32} x_2 x + \alpha x_1 x_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

本式に於ける各項は正確に生物学的意味を持っている。係数は一定であるが、一般的安定性を持たず、時と共に変化するもので、時には徐々に、時には急速なるものとする。(1)式を論議する前に共棲統一体の歴史に関して再び眺めて見よう。現在本例では生活係数の変異にそれを見るのであるが、この合体の話は二種属の綿密な接近に始まるものであって、当初は全く相互に独立したものである。そこで最初、(1)式は更に単純なる形をとる。

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon_1 x_1 - h_{11} x_1^2 - h_{12} x_1 x_2 \\ x'_2 &= \varepsilon_2 x_2 - h_{21} x_1 x_2 - h_{22} x_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

勿論、本方程式の係数は(1)式系のそれとは異なるもので、この二種属は決して関係付けられたものでなく、夫等の内的作用は事実上何等存在しなかった。

$$h_{12} \sim 0 \quad h_{21} \sim 0$$

どんな場合でも、これらの係数に対しては、正の値よりも負の値の方がもっともあり得可き事である。このように単純化をすれば(2)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon_1 x_1 - h_{11} x_1^2 \\ x'_2 &= \varepsilon_2 x_2 - h_{22} x_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

同一の環境に棲むこれらの生活体は、偶然に基だ緩慢な交際に入り得る。恐らく、双方に有利であると言う単なる接近以上には出なかったと思われる。しかしこの会合の機会は0ではない。つまり確率0でない事件は何時か起り得るということである。そこで自由離存の個体の面より一対のある数が現われ、これらの合体によって双方とも利益を見出すような機会をつかむことになる。そこで(3)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon_1 x_1 + \beta_1 x - h_{11} x_1^2 - h_{13} x_1 x - \alpha x_1 x_2 \\ x'_2 &= \varepsilon_2 x_2 + \beta_2 x - h_{22} x_2^2 - h_{23} x_2 x - \alpha x_1 x_2 \\ x' &= -(\mu_1 + \mu_2) x - h_{33} x^2 - h_{31} x x_1 - h_{32} x x_2 + \alpha x_1 x_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

この中で $\beta_1 x$ 及び $\beta_2 x$ 項は一対が偶発的に分離することがあるかも知れない係数で $\alpha x_1 x_2$ は一対の形成を示し、極限係数 $h_{13} h_{23} h_{31}$ 及び h_{32} は一対体と自由離存体との間の相互作用を示すものである。合体は有利であるから極限係数は次の不等式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} h_{33} &< h_{31} < h_{11} < h_{13} \\ h_{33} &< h_{32} < h_{22} < h_{23} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

(3)式の初期の段階では平衡状態がある。

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1}{h_{11}} \quad x_2 = \frac{\varepsilon_2}{h_{22}}$$

(4)式の段階に於いては平衡は次の不等式を満足する。

$$x_1 < \frac{\varepsilon_1}{h_{11}} \quad x_2 < \frac{\varepsilon_2}{h_{22}} \quad x^2 < \frac{\alpha x_1 x_2}{h_{33}}$$

この意味する処は、第三群（一対群）の形成は二群の自由離存体を減少せしめる結果となる事であって、一方又自由個体数の過度の減少は共棲体にとって有利でない。しかし合体が明らかに有利である以上は闘争及び排除の働きがあり、これは自由体の消滅を導き、結局は共棲体の消滅にも結果するであろう。これらの環境の下に於いて解決する方法が二つある。第一に共棲的条件は遺伝的となるということ。共棲一対体の形成は、一対の共通領域と呼ばれるような処では可能で、合体種属の一種の生殖細胞の中若干は、既に他種の生殖細胞又は成熟したものとさえも含んでいる。本現象が局部的に存在している場合には、過程は(5)式に於いて年代順に従う(1)式に依って規定される。次の段階は自由群の全消滅である。この時(1)式系は数理論方程式に還元される。

$$x' = (v - \mu) x - h x^2 \dots\dots\dots(6)$$

本例も蘚苔類に関するものである。鞭毛原虫類と共棲して木材を食する白蟻は本段階には到達しないが、独立生活を営む能力を喪失するもので、この種類の進化に関する他の実例を示して見よう。

— 異質構造群 —

二種の異った種属の場合を今考慮しよう。即ち多くの実例中、やどかりと磯ぎんちゃくの合体をとって見る。この動物の幼虫は、成虫と異った環境に於いて生活を送り、異った生態学的地帯に於いて発達する。 x を共棲一对体の数、 $x_{11}x_{12}$ をやどかりの幼虫、及び成虫の夫々の数、 x_{21} 及び x_{22} を磯ぎんちゃくのこれに相当する夫々の数とする。解放の状態に於いては幼虫は成虫とは争わないで、二種属間の相互作用は何等存在していないことになる。

(1) 第一段階

第一段階は次の諸式によって示される。

$$\left. \begin{aligned} x'_{11} &= n_1 x_{12} - m_1 x_{11} - k_1 x_{11} - h_1 x_{11}^2 \\ x'_{12} &= k_1 x_{11} - \tau_1 x_{12} - g_1 x_{12}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$$\left. \begin{aligned} x'_{21} &= n_2 x_{22} - m_2 x_{21} - k_2 x_{21} - h_2 x_{21}^2 \\ x'_{22} &= k_2 x_{21} - \tau_2 x_{22} - g_2 x_{22}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

(7)式はやどかりに関し、(8)式は共棲一对体形成以前の磯ぎんちゃく集団の発展を示すものである。二群間の平衡状態は、各々一種属についても成り立つことは理論的には可能であるが、決して未だ実現されたものではない。やどかりは可動的動物で、多くの危険な外敵に対して防護される事が悪い。即ち複足類軟体動物が貝殻のような可動的避難所を有しているのに反して、磯ぎんちゃくは自力では移動し得ない動物である。故に流れによって齧らされた餌を食し、防撃手段としては *acontia* を有する。偶然の遭遇に依って同じ貝殻はやどかりを保護し、磯ぎんちゃくを運ぶ。想像される事は、この初期の段階に於いては、*acontia* はやどかりにとって何等危険性はない。そうでなければ合体の形成は不可能である。本合体に於いて、双方とも彼等の自由生活の時以上に有利で、夫等の死亡率及び極限係数は確に減少され、(7)(8)式は補整項を付加する事及び一对体形成を斟酌した第五式をそえる事に依って次の形を取るものである。

訳注： *acontia* (槍糸のような細胞)

$$\left. \begin{aligned} x'_{11} &= n_1 x_{12} - m_1 x_{11} - k_1 x_{11} - h_1 x_{11}^2 + n_1 x \\ x'_{12} &= k_1 x_{11} - \tau_1 x_{12} - g_1 x_{12}^2 - h_{13} x_{12} x - \alpha x_{12} x_{22} \\ x'_{21} &= n_2 x_{22} - m_2 x_{21} - k_2 x_{21} - h_2 x_{21}^2 + n_2 x \\ x'_{22} &= k_2 x_{21} - \tau_2 x_{22} - g_2 x_{22}^2 - h_{23} x_{22} x - \alpha_{12} x_{22} \\ x' &= (\mu_1 + \mu_2 + \mu) x - h_{33} x^2 - h_{31} x_{12} x - h_{32} x_{22} x + \alpha x_{12} x_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

これらの方程式はやどかりが避難所を求め、磯ぎんちゃくの幼虫が休息所を求めるときに純粋に偶然遭遇する事に依って醸成され、維持される事情を表したものである。共通生活に対しては、二種属の事前の適応は何等存在しておらない。即ち若干個体は単に機会のみによって利益を得るに止まる。

(2) 第2段階

このような段階の状態は、淘汰作用は別として、これ以外では、漠然と存続するであろう。即ち若干の場合には、淘汰は、新しい突然変異を消去するし、他の場合では、それ程有利なものではないような、あるものへと移動させられるかも知れないが、この中で、此の后者の偶発性が、更に、もっとも起こり得き事のように思われる。したがって、淘汰作用は、一对共棲体の、偶発的利益を増加するものであると言える。本過程は多少の差こそあれ、おきな草と、密接に共棲する若干の実例によって解説する事が出来る。

例えば、やどかりの一種 *Eupagurus Prideauxii* と、磯ぎんちゃくの一種 *Adamsia Palliata* の場合は、この進化に於ける最高点を示すものである。相互の適応は極めて緊密である。外的刺激に対して極めて鋭敏な磯ぎんちゃくは、この鋭敏さにも抱らず *Eupagurus Prideauxii* が他の餌を捕える際は何等の抵抗をも示さない。そしてやどかりより離れば、生活不能に陥り、後者は、その相手を失えば共棲条件を復活しようとして、凡ゆる事を行うものである。進化機構の作用を理解する為には、(9)式を綿密に観察しなければならない。今、平衡状態が殆んど達せられたとすれば、変数の値は次の不等式を満足する。

$$x^2 < \frac{\alpha x_{12} x_{22}}{h_{33}}; \quad \alpha x_{12} x_{22} < k_1 x_{11}; \quad \alpha x_{12} x_{22} < k_2 x_{21}$$

したがって、 $x_{12} x_{22}$ の各々の減少は x に於ける減少となって結果する。やどかり同志の生存競争は甚だ強烈なため該種属の全滅に結果することがある。これは今論述している第2の解答を考慮に入れた場合に起るもので、二種属の幼虫相の存在は凡てを解明する。相互の牽引を招来する傾向の為に、突然変異の要因が出現してこれは、係数 α を増加し、したがってこの混合集団に於いては、一対体集団を増加する。同時に合体の起る平均年齢は二種属に於いて低下する。自由に離存している成虫は極めて稀となり、特に成熟年齢のものに甚しくなり、自由群より由来して生じた幼虫の数を示す $n_1 x_{12}$ 、 $n_2 x_{22}$ 項は共棲起線の幼虫数を示す $n_1 x$ 、 $n_2 x$ に比して無視されるようになる。一方、単位時間に形成される一対体数は更に積 $x_{11} x_{12}$ に次第に比例するに到る。これは幼虫状態より脱出した後、幼若動物は共棲避難所を見出すか又は極めて迅速に死滅するか何れかであるからである。かくて(9)式は次の如く単純化される

$$\left. \begin{aligned} x'_{11} &= n_1 x - m_1 x_{11} - k_1 x_{11} - h_1 x_{11}^2 \\ x'_{12} &= k_1 x_{11} - x_{12} - g_1 x_{12}^2 - h_{13} x_{12} x - \alpha x_{11} x_{21} \\ x'_{21} &= n_2 x - m_2 x_{21} - k_2 x_{21} - h_2 x_{21}^2 \\ x'_{22} &= k_2 x_{21} - x_{22} - g_2 x_{22}^2 - h_{23} x_{22} x - \alpha x_{11} x_{21} \\ x' &= -(\mu_1 + \mu_2 + \mu) x - h_{33} x^2 + \alpha x_{11} x_{21} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

もし繁殖率 $n_1 n_2$ が十分に大であれば(10)式は安定的な平衡状態へと導く。やどかりの他の種属中にはおきな草と合体するものもあるが、磯ぎんちゃくの一種 *Adamsia Palliata* とやどかりの一種 *Eupagurus Prideauxii* との合体程親近なものではない。このおきな草 *Sagartia* はやどかりと共棲はするが、やどかりなくしても、又生活し得るものである。

2. 単純な寄生生活

寄生現象は、一般に他種属の生活を維持する一方、特に一種に好都合な生活で、その生活係数に関する仮定を修正して、共棲現象の特殊な場合として取扱われ得る。しかし寄生生活は深く器官を変化させられる為に特別な研究が必要である。

(1) 第一例；食虫寄生生物

食虫寄生生物の作用に関する W. R. Thompson の一連の記載にしたがって、A. J. Lotka は第一次の微分方程式系に関する分析を完成した。今、W. R. Thompson と共に二種属が共に見出されたものとする。即ち宿主である有害な混虫と、この混虫を破滅に導く寄生生物の関係である。寄生生物は宿主にある数の卵を産む。この中平均 k 個が孵化して幼虫となり、次に自由生活

を営む成虫に変ずるものである。寄生生物の各放卵は終わりに、今まで生存していた宿主を破滅に導く。 p_1 を未だ健全な宿主の数、 p_2 を放卵しようとして、昆虫の宿主を求める自由な成虫寄生生物の数とすれば二種属の発展は次の二方程式の型によって示される。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \epsilon_1 p_1 - h_{11} p_1^2 - h_{12} p_1 p_2 \\ p_2' &= k h_{12} p_1 p_2 - m_2 p_2 - h_{22} p_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

二乗項は、例の如く、凡ての極限要因の全作用を示し、 $k h_{12} p_1 p_2$ 項は単位時間に孵化し切った寄生生物の卵の総数を示すものである。(1)式は三つの固定状態を与える。

(a) 二種属の破滅

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0$$

この状態は ϵ_1 が負の場合にのみ安定的である。

(b) 寄生虫の退却

$$p_1 = \frac{\epsilon_1}{h_{11}} \quad p_2 = 0$$

本状態は、 $k \epsilon_1 h_{12} < m_2 h_{11}$ の時にのみ安定である。

(c) 二種属の共存

$$p_1 = \frac{h_{22} \epsilon_1 + h_{12} m_2}{h_{11} h_{22} + k h_{12}^2} \quad p_2 = \frac{k h_{12} \epsilon_1 - m_2 h_{11}}{h_{11} h_{22} + k h_{12}^2}$$

本状態は $k \epsilon_1 h_{12} > m_2 h_{11}$ の時にのみ安定である。我々は特殊な観点よりこれらの結果を論じて見よう。理論的には寄生虫の導入だけでは宿主を完全に破滅させる事は出来ない。最も好都合な場合に於いては ($p_1 p_2$) 系は0でない平衡値に向うものであるけれども、最初に十分大きな寄生虫数を採ると言う事になれば、欲する限り p_2 軸に密接に接近し得るような、したがって宿主が全滅してしまうという形がとれる。“事実、肝要な事は宿主の数と、寄生虫の繁殖率との間の相互依存関係を考慮する事である。”蠅類の一種 *Calliphora erythrocephala* の寄生虫 *Marmoniella vitripennis* に関する Smirnov 及び Kusun の実験に於いては、一匹より百匹まで変化する。ある一群の蠅は一對の寄生虫の為に自由にされている。各実験は平均12日間続行したもので、その結果は次表の如くである。

蛹 の 数	1	2	3	5	10	25	50	64	98
蛹 一 匹 に 付 寄 生 虫 の 数	22.6	23.8	22.4	22.3	18.8	14.1	9.0	10.7	7.8
寄 生 虫 の 総 数	22.6	47.5	67.2	111.4	187.5	352.5	451	682	745

訳注： *Marmoniella* はウチワ虫の一種である。

通常の家蠅に就いても同様な結果が得られた。

蛹の数	1	2	3	5	10	25	50	84	89
蛹一匹に付 寄生虫の数	12.4	8.8	7.5	7.3	6.4	5.7	5.4	2.5	4
寄生虫の総数	12.4	17.5	22.6	36.5	64.4	142	268	212	354

この蔓延は蠅を駆逐するのに如何なる程度まで寄与するものであろうかは更に問題となるところである。本結果は宿主に依存したもので、生残した蠅の割合は、Calliphara では極めて小であったが、家蠅 *Musca domestica* にとっては相当な数に上っている。故に蠅群の全滅は起らないのである。よって Lotka の(11)式は、重大な修正を必要とするものである。次の例は生活係数及び夫等宿主の運命に関する寄生虫の作用を研究したものである。

(2) 第二例

寄生虫が、健全に動いている宿主との共存によって存続される場合を考える。先づ宿主の増加は起こらないで、寄生虫も宿主内では増加しないものとし、第二にこの増加は外界より侵入して来た自由な幼虫の為に起るものとする。第三に寄生虫の幼虫数は伝染された宿主の数に比例するものとし、第四に寄生虫は宿主の生活係数には影響せず、第五に宿主は健康に生まれるものとする。このような仮定は宿主に甚だ都合な条件を与える。 x を自由宿主、 y を伝染宿主の夫々の数とすれば次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x' &= n y + \varepsilon x - h x^2 - h x y - \alpha x y \\ y' &= -m y - h x y - h y^2 + \alpha x y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$\alpha x y$ 項は単位時間に伝染される健康宿主の数を示す。全集団は次の数理論法則にしたがっている。

$$x' + y' = \varepsilon (x + y) - h (x + y)^2 \dots\dots\dots(13)$$

二群間の本集団の分布に対しては二つの可能性がある。第一は、 $\alpha > h$, $\frac{m}{\alpha - h} < \frac{\varepsilon}{h}$ で寄生虫

の生産に関しては寄生される可き宿主群の維持を、健康群の側から確保するに十分大である事である。その極限は次の如くである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{n}{\alpha} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\varepsilon \alpha - n h}{\alpha h}$$

第二の場合は、 $\alpha - h < \frac{h m}{\varepsilon}$ で、寄生虫の再生が伝染宿主群を結局は消滅させてしまうようになる。

その極限は次の如きものである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{\varepsilon}{h} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$$

故に第一の場合に於いては、二群が共存するが、第二の場合では集団は寄生虫を除去することに

なる。

(3) 第三例 寄生的去勢

第二例の仮定は、この中より汚染が宿主をして、再起不能に陥るといことがなければ、本例に於いても、そのまま活用し得るものである。この時は(12)式によって置換される。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varepsilon x - h x^2 - h x y - \alpha x y \\ y' &= -m y - h y^2 - h x y + \alpha x y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

これは伝染宿主に於ける出生率を示す項 $n y$ が欠如していることによって異ったものである。此の仮定は最終の結果を変せしめるものでなく、前節に於ける二つの可能性はそのまま存続し、第一の場合は $\alpha \varepsilon - h n > 0$ で、寄生虫の生殖作用は健康群の側に於いて行われ、伝染宿主群の存続を確保ならしめるに十分である。本極限は次の如くである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{m}{\alpha} + \frac{h n}{\alpha^2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\varepsilon \alpha - h n}{x^2}$$

第二の場合は $\alpha \varepsilon - h n < 0$ で、これの意味する処は寄生虫の増加は不十分であって、その経過は汚染宿主の全滅と共に終る事である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{\varepsilon}{h} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$$

(4) 第四例；宿主の死亡率を高める寄生作用

又第二例の仮定は、汚染宿主の死亡率の増加と言う事を除けば、本例でもそのまま活用し得るもので本方程式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varepsilon x + n y - h x^2 - h x y - \alpha x y \\ y' &= -(m + \mu) y - h y^2 - h x y + \alpha x y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

本論の質的結果は第二、第三例と異なるものである。 $\varepsilon (\alpha - h) > (m + \mu) h$ の場合は寄生虫の生殖作用は寄生された群の存続を確保するに十分である。しかし $\varepsilon (\alpha - h) < (m + \mu) h$ の時は寄生された群は消滅し、極限は次の如くなる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{\varepsilon}{h} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$$

(5) 第五例

固有死亡率や繁殖率に影響を及ぼす事なく、極限係数を増加させる寄生作用。この方程式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varepsilon x + n y - h_{11} x^2 - h_{12} x y - \alpha x y \\ y' &= -m y - h_{21} x y - h_{22} y^2 + \alpha x y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

これらの方程式は、前述のそれより複雑であるが結果は同一である。即ち常に二つの結果がある $\varepsilon (\alpha - h_{21}) > m h_{11}$ の場合は二群の共存が可能で、 x 及び y の極限は 0 とならない。一方、 $\varepsilon (\alpha - h_{21}) < m h_{11}$ の時の極限は次の如くなる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{\varepsilon}{h_{11}} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$$

“以上四例に於いては、凡て生活係数に及ぼす寄生虫の可能な影響に就いて考慮したのであった。結果は凡ゆる場合に於いて同様である。寄生虫の活動性は、直接に宿主を撲滅するには十分なものではないが、身体的、数的には此等を弱減させる。この弱減現象は、ある種属とその環境の間の平衡を攪乱するもので、ある臨界値以下に数が下降すれば、消滅する。

3. 寄生生活の増加

寄生生活の増加は若干の方法によって行われる。即ち伝染の増加か又は宿主内寄生虫の増殖かの何れかである。二種属は異った数学的展望を持っているが、これらを識別する事は必ずしも容易なものではない。屢々推奨されている単純な標準は甚だ不正確なものである。

— 感染増加 —

先づ増加した寄生生活は感染の増加に起因されるものである。 x を宿主の総数、 x_k を k 匹の寄生虫を有する宿主の総数、 $p = \sum_{k=2}^{\infty} k x_k$ を寄生虫の総数、 $q = \sum_{k=2}^{\infty} x_k$ を感染された宿主の総数とする。更に寄生成虫は自由生活を送る事は不可能であるけれども夫等の幼虫では比較的短期間はこの自由な環境に於いて生活し、彼等が宿主に出会う機会毎にこれに入り込むものと想像される事が出来る。単位時間をとれば如何なる宿主と雖も、一匹に付一回以上感染され得るものはないと言える。この条件で、微分方程式は次の如く与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sum_{s=0}^{\infty} n_s x_s - m_0 x_0 - c_0 p x_0 - \sum_{s=0}^{\infty} h_{0s} x_s \\ x'_k &= -m_k x_k - c_k p x_k - c_{k-1} p x_{k-1} - x_k \sum_{s=0}^{\infty} h_{ks} x_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

感染係数 c_k は凡ての群に対しては同一でない。免疫性と言う事が感染を通して起る時は、係数は減少系列を形成し、宿主が寄生生活に依って衰弱する場合は、係数は増加系列を形成するものである。宿主体内の寄生虫の死亡率は無視される。当面研究されている生物学的系統が固定状態に達するものとすれば、 x'_k を消去して一般に次式を得る。

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{c_{k-1} p}{c_k p + m_k + \sum_{s=0}^{\infty} h_{ks} x_s} \dots\dots\dots (18)$$

寄生虫の存在は宿主を弱め、後の感染に対する抵抗を減殺すると仮定すれば、この場合は

$$c_{k-1} < c_k$$

で、この条件では18式は、 $x_k < x_{k-1}$ を与え、これは系列

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

が減少しつつあるか又は、換言すれば k 匹の寄生虫を持っている宿主は $k-1$ 匹の寄生虫を有する宿主より稀有である事を意味する。一方、寄生虫の存在は他の寄生幼虫が侵入するのに対して一障壁を形成するとすれば、即ち $c_{k-1} > c_k$ の場合では、 k のある値に対して、 $x_k > x_{k-1}$ 及び19式系列

は、その減少性質を失うと言う事は全く可能である。ある例に於いては、更に増加する事も可能なのである。故に宿主内の寄生虫が生殖作用を行はない事は(19)系列をして、減少理論を示すということは正しくないのである。

— 宿主内寄生虫の増殖 —

汚染の増加がなく、寄生虫の生殖作用のみが寄生生活の唯一の原因であると言った場合を考えて見る。微分方程式は僅か異った形を取る。即ち次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \sum_{s=0}^{\infty} n_s x_s - m_0 x_0 - c p x_0 - x_0 \sum_{s=0}^{\infty} h_{0s} x_s \\ x'_1 &= -m_1 x_1 - \beta_1 x_1 + c p x_0 - x_1 \sum_{s=0}^{\infty} h_{1s} x_s \\ x'_k &= -m_k x_k - \beta_k x_k + \beta_{k-1} x_{k-1} - x_k \sum_{s=0}^{\infty} h_{ks} x_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$\beta_k x_k$ は宿主内寄生虫の生殖作用を示す。本例に於いても二つの異った結果が得られる。一宿主に多数の寄生虫が存在してもその増加を阻止し得るものでなく Malthus の増加率を示すものである。これは $\beta_k > \beta_{k-1}$ で、固定状態に於いては

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{\beta_{k-1}}{m_k + \beta_k + \sum_{s=0}^{\infty} h_{ks} x_s} \dots\dots\dots (21)$$

であるから、(19)系列は減少するか、換言すれば、 k 匹の寄生虫を有する宿主は $k-1$ 匹の寄生虫を有する宿主よりもまれであると言う事である。一方宿主の内部に於いては寄生虫が、丁度ある集団に影響を及ぼす同様な極限要因にしたがっているとすれば、 $\beta_k < \beta_{k-1}$ で、 k のある値に対しては、 $x_k > x_{k-1}$ となる。よって(19)系列はその減少性質を失うに到る事が起り得る。故に感染増加がなければ(19)系列は減少しないものであると述べるのは正しくない。此等単純な考察によって、我々は被寄生宿主の分布の数的観点より、増加寄生生活の性質に関して、結論を導こうとする時は、如何に多くの注意が必要であるか分る。もし(19)系列が減少しつつあるものとすれば、宿主の弱減により、容易となった感染増加と、宿主内寄生虫の無限の増殖との間に、ある淘汰が行われる。もし本系列が減少しないものとすれば、宿主の増加した免疫性と、寄生虫の一定増殖との間にある淘汰がある事になる。しかし二つの要因が同時に作用する時は一層事態を複雑にし、淘汰をして不可能ならしめる事は注意をする事である。我々は異った要因の影響に関してより正しい認識が与えられる若干の実例を採用して見たい。

— 第1例 内部的増殖はなく、寄生虫は生活係数に影響を及ぼさない場合
(17)式は次の形を取る。

$$\begin{aligned} x'_0 &= n x - m x_0 - c p x_0 - h x x_0 \dots\dots\dots (22) \\ x'_k &= -m x_k - c p x_k + c p x_{k-1} - h x x_k \dots\dots\dots (23) \\ &\quad (k = 1, 2 \dots\dots\dots) \end{aligned}$$

これら諸式の総和は次式に等しい。

$$x' = (n - m) x - h x^2 \dots\dots\dots (24)$$

本式は、凡ての群が共に数理論方程式を満足するものである事を示している。同一方程式は 1, 2, 3……を乗じて加えれば次式を得る。

$$p' = p[-m + (c - h)x] \dots\dots\dots(25)$$

24式の解は

$$x = \frac{a(n-m)e^{(n-m)t}}{n-m-ha+hae^{(n-m)t}} \dots\dots\dots(26)$$

但し a は x の初値を示すものである。又、

$$p = p(0)e^{-mt} \left[1 - \frac{ha}{n-m} + \frac{ha}{n-m} e^{(n-m)t} \right] \frac{c-h}{h} \dots\dots\dots(27)$$

宿主の総数は次の極限に向う。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{n-m}{h}$$

寄生虫の分布に関する限り、二つの可能性を考慮しなければならない。第一は $c(n-m) > nh$ で、寄生虫の総数は不明瞭に増加する。この状態を、明白に述べる事は生物学的には不可能である、と言うのはもし寄生虫が更にその数を増加すれば、それらの終末は、彼等の宿主の減少変化となり、生活係数は変化して問題を完全に困難ならしめる。第二は $c(n-m) < nh$ で、 x_0 を除いた凡ての x_k

が $\frac{n-m}{h}$ に接近するにつれて、寄生虫の数は0に向うもので、結果としては、宿主は彼等の寄生虫を駆逐する事となる。不等式 $c(n-m) \geq nh$ は多くの生物学的解釈に役立っている。次の例は何等内部的の増殖が行われない場合に寄生虫による不利益の効果を攻究するものである。

— 第2例 寄生虫が死亡率及び宿主との遭遇係数を修正する場合 —

寄生虫の作用は次の如く、死亡、遭遇の両係数を修正するものとする。

$$m_0 = m, \quad m_k = m + \theta \quad (k = 1, 2 \dots\dots\dots)$$

$$h_{0s} = \lambda, \quad h_{ks} = \lambda + \mu \quad (k = 1, 2 \dots\dots\dots, s = 0, 1, 2 \dots\dots\dots)$$

繁殖、及び感染の両係数はそのまま変わらない。この条件に於いて(17)式は次の如くなる。

$$x'_0 = nx - mx_0 - cpx_0 - \lambda x_0 x \dots\dots\dots(28)$$

$$x'_k = -(m + \theta)x_k - cpx_k + cpx_{k-1} - (\lambda + \mu)xx_k \dots\dots\dots(29)$$

($k = 1, 2 \dots\dots\dots$)

これより次式を得るであろう。

$$p' = p[-(m + \theta) + (c - \lambda - \mu)x] \dots\dots\dots(30)$$

$$x' = (n - m - \theta)x - (\lambda + \mu)x^2 + \theta x_0 + \mu x x_0 \dots\dots\dots(31)$$

(28)(30)(31)の三式により x_0, x, p の三函数の値を求める事が出来る。此処では平衡状態を述べるに止めよう。即ち又二つの可能性が考えられる。第一の場合は $c - \lambda - \mu < 0$ で、函数 p は減少し、0に向う。即ち変数 $x_1, x_2 \dots\dots$ は又0に向う事を意味するもので、宿主は寄生虫を駆除し、終わりに極限に到る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0 = \frac{n-m}{\lambda}$$

第二の場合は次の不等式が成立する場合である。

$$\left. \begin{aligned} c - \lambda - \mu > 0 \\ (c - \lambda - \mu)(n - m) > \lambda(m + \theta) \\ c(m + \theta) > n(c - \lambda - \mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

方程式 (28) - (29) は次の平衡値を与える。

$$\begin{aligned} X &= \frac{m + \theta}{c - \lambda - \mu} \\ P &= \frac{(m + \theta) [(n - m)(c - \lambda - \mu) - \lambda(m + \theta)]}{(c - \lambda - \mu) [c(m + \theta) - n(c - \lambda - \mu)]} \\ X_0 &= \frac{(m + \theta) [c(m + \theta) - n(c - \lambda - \mu)]}{(c - \lambda - \mu) [\mu(m + \theta) + \theta(c - \lambda - \mu)]} \\ X_k &= \frac{C^k P^k X_0}{[m + \theta + cP + (\lambda + \mu)X]^k} = \frac{P^k X_0}{(P + X)^k} \end{aligned}$$

かくて、 X_k の値は、減少等比級数の数列を形成し、ある場合には密接に観察と一致する。平衡は安定的であって、本経過は、(32)式が満足される時は、平衡に向うものである。この場合は健康宿主及び汚染宿主の共存が可能である。次例は、死亡係数及び極限係数に於ける級数増加の場合に、唯一の可能性ある結果は、 $x_0 x_1 x_2 \dots\dots\dots$ の諸群が共存するか、又は被寄生群が完全に消滅するかの何れかである事を示すに役立っている。

— 第3例 寄生虫が累進的に極限係数を変える場合 —

我々の概念を固定させる為には寄生虫の作用は極限係数の等差級数によって示されるとする。

$$h_{k_s} = \lambda + \mu k$$

(37)式は次の如くなる。

$$\begin{aligned} x'_0 &= n x - m x_0 - c p x_0 \lambda x_0 x \dots\dots\dots (33) \\ x'_k &= -m x_k - c p x_k + c p x_{k-1} - (\lambda + k \mu) x x_k \dots\dots\dots (34) \\ &\quad (k = 1, 2 \dots\dots\dots) \end{aligned}$$

本式は先づ次式を与える。

$$x' = (n - m) x - \lambda x^2 - \mu p x \dots\dots\dots (35)$$

二つの安定状態が可能であり、第一は

$$\begin{aligned} \mu P + \lambda X &= n - m \\ \frac{X_k}{X_{k-1}} &= \frac{c P}{m + c P + (\lambda + k m) X} < 1 \\ X_0 &= \frac{n X}{m + c P + \lambda X} \end{aligned}$$

で、これはPに関して X_k を示し得るものである。

$$X_k = \frac{n(n-m-\mu P) \lambda^k c^k P^k}{[\lambda n + \lambda P(c-\mu)] \prod_{s=1}^k [\lambda n + \lambda(c-\mu)P + s\mu(n-m-\mu P)]} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (36)$$

X_k を $p = \sum_{k=1}^{\infty} k x_k$ によって置換すれば P を決定する次式を得る。

$$P = \frac{n(n-m-P)}{\lambda n + \lambda(c-\mu)P} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k c^k P^k}{\prod_{s=1}^k [\lambda n + \lambda(c-\mu)P + s\mu(n-m-\mu P)]} \quad (37)$$

目下問題にしている P の値は、極限 $(0, \frac{n-m}{\mu})$ 内になければならない。そうでなければ x_k は負の値を持つことになり、これは不可能である。(37)式の右辺は $p=0$ 又は $p = \frac{n-m}{\mu}$ の時消失する。故に、区域 $(0, \frac{n-m}{\mu})$ に於いて本式は最大を通過する。(37)式は本区域に於いて、もし

$$\lambda n < (c-\mu)(n-m) \quad (38)$$

が満足されれば、0以外の根を確かに持っている。本不等式は若干の方法で、説明される。例えば、 c 係数によって示される宿主の感染は、極限係数 λ 及び μ で表される処の破壊的傾向に対立する要因であると言う事。また不等式(38)が満足され、 P を(37)式の0でない第一根とすれば、本系の第一の安定的な固定状態は次の値、及び(36)式に依って表される。

$$p = P, \quad x_0 = \frac{n(n-m-\mu P)}{\lambda n + \lambda P(c-\mu)}$$

x_k 系列は減少する。反対に(38)式が満足されないとすれば、本系列

$$p = 0, \quad x_0 = x = \frac{n-m}{\lambda}, \quad x_1 = x_2 = \dots = 0$$

は第二の安定的固定状態を示し、この状態では、寄生虫に有利な要因は、被寄生群の存在を確実にするには不十分である。

— 第4例 死亡係数に於ける累進的增加 —

死亡係数は、 $m_k = m + \theta k$ と言う形を取り、その他の生活係数は影響されないものとする。(17)式は次の如くなるであろう。

$$x'_0 = n x - m x_0 - c p x_0 - h x_0 \quad (39)$$

$$x'_k = (m + k \theta) x_k - c p x_k + c p x_{k-1} - k x x_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (40)$$

本系の平衡状態は次式によって与えられる。

$$\theta p = x(n - m - h x) \quad (41)$$

$$x_0 = \frac{n x}{m + c p + k x} \quad x_k = \frac{c^k p^k x_0}{\prod_{s=1}^k (c p + h x + m + s \theta)}$$

これらの式を $p = \sum_{s=1}^{\infty} s x_s$ で置換すれば次式を得る。

$$p = \frac{nx}{m + cp + hx} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k c^k p^k}{\pi^k (cp + hx + m + s\theta)} \dots\dots\dots (42)$$

(41)(42)によって p 及び x を決定する事が出来る。 $h(\theta + n) > c(n - m)$ の場合、次の固定的の安定状態がある。

$$x = x_0 = \frac{n - m}{h}, \quad p = 0, \quad k_k = 0 \quad (k = 1, 2 \dots\dots\dots)$$

又、 $h(\theta + n) < c(n - m)$ の場合は、(42)式の 0 以外の第一根に等しい p に関して安定的の平衡状態がある。“このようにして感染宿主を連続的に除去する事は、不明瞭に増加する感染に対抗して一集団を保護する唯一の手段である。凡ゆる場合に於いて、汚染集団は生活係数を適当に修正する事によって寄生虫より免れ得るものである。”

— 第 5 例 Pagurus (やどかり群) と Chlorogaster (甲殻類の一種) —

我々は、正確な図式を有する寄生現象の唯一の場合を研究する事によって本章を終ろう。本例は、Pagurus の Chlorogaster に依って寄生される場合である。これらは甲殻類の一種である rhizocephaloid crustacean で Pagurus にある外部的内臓囊に存在するものである。各囊は明らかにこれ自身独立根の系統を有する。C. Perez は 2,000 匹以上の Pagurus を検し、横行蔓延している Pagurus の内臓囊の分布に関してその公式を研究した。彼の解剖学的研究によれば、増加感染の仮定は無視される事が出来て、宿主内寄生虫の生殖作用の仮定だけが存続するものである。ここでは、寄生虫の一定増殖又は無限増殖の二つの可能性の間に一つの淘汰がある。

訳注： rehizocephaloid は節足動物の甲殻類の中で根頭類に属するものである。

単に前者だけが、寄生虫の分布の中、何等減少しないものを与えている。Perez の観察に於いては、分布は減少しなかったのである。したがって内臓囊の増殖は限られたものである。寄生虫の内部的増殖は若干の方法で起る。

- (1) 初期の感染は単に一匹の幼虫に原因するものであるが一度び内部に到った後は、寄生虫の量は時期早く分裂して無数の独立片に細分し、これ等は凡て同等に発達するものと想像される。
- (2) 次に想像される事は、幼虫一匹の接種によって生じた寄生虫の量は、それ自身分裂しないで残り、連続根の系統をひき起こす。即ち長く生活して、貯蔵量となり、これより、外囊の継続群は、不連続的成長によって分離されてくる。感染 Pagurus に関する最近の解剖学的研究の結果として Perez はこの発芽の仮説を採用したのである。この発芽仮説を認めれば、囊数と宿主の年齢との間に若干の関係があることは想像出来る。 u を寄生虫の年齢とすればこの年齢は常に宿主より少ないものである。このようにして、もし囊数が寄生虫の年齢と共に増加すれば、最大多数の囊を有している Pagurus は平均、最も老齢なものであろう。 N_c を感染宿主の総数 $N_c \phi(u) du$ を年齢 ($u, u + du$) を寄生虫の数とすれば、この数は Pagurus の死亡率及び寄生虫の死亡率と一致して減少する。又 $x(u)$ で複合死亡係数を示せば明らかに

$$x(u) = - \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}, \quad \phi(u) = \phi(0) e^{-\int_0^u x(s) ds}$$

今、年齢 u 、囊数 p に関してこれを寄生虫の頻数函数 $N_c \phi(u) \psi(u, p) du dp$ の中に入れると、年齢は ($u, u + du$) を有し、($p, p + dp$) の内臓囊を有する寄生虫の数を与

える。この函数は、国勢調査統計に使用された函数と全く同様のものである。函数 $\psi(u, p)$ に次の形を与える事が出来る。

$$\psi(u, p) = \frac{1}{\beta(u)} V\left(\frac{p}{\beta(u)}\right)$$

$N(p) dp$ に依って $(p, p+dp)$ 個の囊を有する Pagurus の数を示せば

$$N_c = \int_0^\infty N(p) dp \quad I = \int_0^\infty V(p) dp$$

これより、容易に積分式は次の如くなる。

$$N(p) = N_c \int_0^\infty \frac{\phi(u)}{\beta(u)} V\left(\frac{p}{\beta(u)}\right) du$$

本式は、他の函数が凡て知られば、頻数函数を決定することになる。事実

$$F(z) = \frac{\int_0^\infty N(p) p^{iz} dp}{\int_0^\infty \phi(u) [\beta(u)]^{iz} du} \quad \text{と置けば}$$

$$V(p) = \frac{p}{2\pi p} \int_{-\infty}^\infty p^{-iz} F(z) dz \quad \text{を得る。}$$

函数 $\beta(u) x(u)$ は未知であるから、これらに任意の然し可能な形を与へて見よう。

$$x(u) = B \eta u^{\eta-1} \quad \beta(u) = A u^\epsilon$$

一方、経験函数は次の如くである。

$$N(p) = \frac{N(P) \frac{n}{m} \left(\frac{p}{P}\right)^n}{\left(\frac{p}{P}\right)^n + \frac{n+m}{m}}$$

本式は寄生虫囊の観察分布を甚だよく表しており、 P は $N(p)$ の最大に相当する囊の数である。次表に示すように、近似値は十分正確なものである。採用された媒介変数は次の如きものである。

$$\text{雄; } n=7 \quad m=1.75 \quad P=5.0 \quad N(P)=29$$

$$\text{雌; } n=7 \quad m=1.75 \quad P=4.5 \quad N(P)=31$$

$\frac{\eta}{\epsilon}$ に等しいように n をとり、 $\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ に等しいように m をとれば、函数 $V(p)$ 及び $\psi(n, p)$

を計算する事は困難な事ではない。

$$\psi(u, p) = \text{Const} \frac{[\beta(u)]^{n-m-1} \exp\left\{-\frac{n-m}{m} [\beta(u)]^n p^{-n}\right\}}{p^{n-m}}$$

$\frac{p}{N(p)}$	$N(p)\delta$		$N(p)\varphi$		$N(p)$ 総和	
	観 察	理 論	観 察	理 論	観 察	理 論
1	4	2.3	2	3.0	6	5.3
2	7	7.8	10	10.0	17	17.8
3	9	15.7	17	20.0	26	35.7
4	24	24.5	30	29.3	54	53.8
5	29	29.0	29	29.3	58	58.3
6	25	24.2	17	19.5	42	43.7
7	11	15.5	7	10.8	18	26.3
8	10	8.8	5	5.7	15	14.5
9	6	5.1	—	3.2	6	8.3
10	3	3.1	2	1.9	5	4.9
11	2	1.9	—	—	2	1.9

本式は Pearson の頻数函数の一つである。もし、囊数が年齢と共に、ある限界にまで増加する事が認められれば、 u 及び p に関しては、Pagurus の蓋然分布に、性質上、可成りよく一致している。Perez によれば、これより、分布は直接にしたがうものであると。したがって、限られた一定の発芽仮設に依って、補足された単純汚染の仮設は事実をよく説明し得るものと言える。

訳注； 本章の積分は第4章に於ける公式を参照すれば十分了解出来るものである。

第十一章 有機体の成長

1. 一般的考察

自然的及び単純な一般化によって、有機体は容易に、動物又は植物集団にたとえる事が出来る。例えば前章で攻究されたようなものである。即ち細胞は、時としては器官をも、殆んど独立要素として考慮される。二極端を関係付ける一列を補う事は実際可能であるが、二現象の間に於ける、正確な分岐点を指摘する事は極めて困難である。しかしながら、この不可能性は、専ら次の事を意味する。即ち、二つの極端のものは融合されて、完全な独立個体より構成される一集団の数的増加は、社会的機構を持たず、多くの複合機構を持っている高等な有機体の数的増加を支配すると同様な法則によって支配される事がある。第一近似式に於いて、偶々二者は類似した方程式によって示す事が出来るが、第二近似式は生活係数の説明も何れも同一なものでない。

事実、異った社会機構を持っている諸集団間に於てさえ、国勢調査では同じ類型は存在しないものである。殆んど無政府的な殆んど同質の原始社会と言うものは稀薄な気体にもたとえる事が出来るであろう。

資本家にせよ又は社会主義者にせよ、現代社会はかなり明らかな流れを持っている。しかも甚だ稠密な異質の粘着液体に極めて密接によく似ていて、他の人々にはわからない一連の法則及び勢力にしたがっている。最も重大な差異が社会的機能に対して、労働の分担及び特殊な機関の存在にあるようである。動物集団に於いては、各個体は彼自身ひとりで、その要求に応じて、身を守り、支給するものであるが、有機体組織に於ける細胞は全体生活に於て、分ち合い、食料を受け、代謝産物は取除かれる。一集団に対して必要な食料は、各個体数に比例するものであるが、有機体組織に於いては、必要食料は細胞数又は個体の重量の何れにも比例しない。同様に外的環境に対する凡ての諸関係に関してこれにあてはまる。動物又は植物集団に対して、このような交換は個体数に比例するが、温血動物に対しては此等は表面積に比例する。動物又は植物集団に於ける増殖能力は凡て個体に属しているが、有機体細胞に就いてはこの事は真実ではない。要するに、二型式間の差異は量的なものではなくて質的のものであり、量より質への弁証法的過程は現実的に感知し得る、且否定し難い事である。

訳註；此処に言う個体とは蜜蜂又は白蟻の巣のような動物社会を除くものであって、これ等は又別途の取扱を必要とするものである。即ち夫々の能力が載然としているものは必ずしも生殖に直接関係あるものではない、即ち働き蜂のようなものが之である。又雌が一であると言うような蟻の場合もこれに類するものである。

— 単細胞有機体より多細胞有機体への発展 —

単細胞組織より多細胞組織への進化に於ける継続段階は再び建て直される事が出来る。この経過の初期は結合後、不完全な分離より結果された共棲生活であったものに相違なく、不完全な分離は二個体の全面積を縮小し、環境とそれらとの交換を減少せしめるものである。ある状態に於いてはこの縮減も有利で、特に特殊な表面を有する原虫類に於いては利益がある。

分離に依っては起らない処の分裂から結果される連鎖形式は時には繊毛虫類間に見る事が出来る。物理化学的条件の修正に依り、この形式の初期に於いては、多細胞組織の完全な分離は人工的に示す

事が出来る。環境的条件を変化させる中に、確かに好都合な状態は多少とも孤立している時に見出される。淘汰作用は残余のものに働く。

このようにして形成された多細胞有機体に於いては、細胞の特殊化は不可避的であって、最初の特殊化は外的及び内的の細胞間、或は上位及び下位の細胞間に於ける分化である。同時にある機能が阻害されたり、局所に限定されたりする。Stylonychia は一日に凡そ5分裂をするが、組織の細胞増殖は緩慢な律動にしたがっている。更に一有機体の凡ゆる部分に於いては成長能力は同程度には見出されない。植物では厳密に局限化され、動物では、局限化がそれ程著しくはないが存在はしている。

訳註：Stylonychia は原生動物の第2綱螺旋毛類に属し第7目の下毛類のものである。

— 外部的表面の機能 —

一集団の生活に於いては、境界は軽微な役割を演ずるだけで、栄養の行われるのは内面に於いてである。そして方程式を建てる場合若干の補助項を与える、又これの分析的性質は、基礎項目のそれと類似しており、移出入の移動は大したことはない。一有機体は細胞の移出入は殆んど考え得られない。しかし滋養物質及びエネルギーの流れは、重要なものである。

この事実は、温血動物の基礎消費、即ち一定温度に於いて個体を維持するに必要なエネルギーは面積に比例することを暗示している。この“表面積の法則”は十分に実験によって、立証されている。しかし機能の消費は表面積に比例せず、有機体の食料の活用は、再び特殊な法則に支配され、これは不完全乍ら窺知出来る。だが如何なる場合に於いても、その消耗によって起こる食料とエネルギーとの比例関係には何等結果しない。

— 構成消費 —

基礎消費、機能消費の外に、構成消費と言う建設に必要な消費を考慮しなければならない。即ち単位時間に再建され、破壊される細胞数の差である。斯る差の説明に必要なエネルギーの消費は、他の二つの消費に比すれば甚だ小さいものであるが、その結果は重大なものである。有機体の構成ポテンシャルは先づ腺活動の性質に依存し、第二に個体の代謝産物蓄積に、第三に局部的遅滞作用、即ち換言すれば、細胞集団の密度に、第四に細胞分裂の局限化に依存するものである。凡てこれらの要因は有機体の年齢と共に変化し、内分泌作用の器官は、同時には活動性に入らないものである。食料も年齢と共に変化し、量、質共に変化する。即ち哺乳動物では哺乳期は彼等の生活の他の期間とは著しく異り、性腺の参加は、深く、有機体の生活係数を修正するものである。組織の必然的変質と共に、代謝産物の累積は最初に成長の障害を導き、次には有機体を死滅させるに到る。最後にこれらの加速度的、遅滞的要因に加えて、有機体の外形が斟酌されなければならない。順々に、形態が発展して行く事は疑いもなく単純な、しかし現今まで未だ分らないある法則に従うものであるが、事実に関する、特に消極的性質に関する若干の報告は興味がある。第一に、有機体の成長は凡ゆる方向に同時に起るものではない。人間は先づ身長を増加し、次に巾を、最後に容積を増加すると言う長い間の観察は、凡ての有機体に、必要な修正を加えて適用される。故に引き続き、生活の異った時間に於ては成長は、重量、面積、身長の何れにも比例しないと言える。しかし、重量の、ある力 W^m については、比例するかも知れない。もし比例するとすれば指数 m は年齢に依存し、多分、又重量にも依存する事となる。 $m \sim m(t, w)$ 同様な事は、凡て他の生物学的諸性質、及び諸要因に關しても真実である。

— 方程式として示された成長問題 —

本議論の最後の結果を綜合すれば次の如くである。

- (1) 一有機体、或は何等かの身体的性質の成長に就いては、この発展は単純な方程式又は単純な公式によって、表わす事が出来る。

- (2) 過程は若干の部分へと区分する事が出来て、(例えば、人間に対して言うなら胎生期、呼吸及び、摂食する幼児期、青年期、性的完熟期、老齡期等の区分である)各部分は適切な方程式に依って示され得る。
- (3) 重量 W と関連付けられていることについて、身体如何を問わず各部の数的諸特徴は $x \sim w^m$ 型のもので連鎖されている。
- (4) よって、重量増加の各段階は次の積分方程式によって示される。

$$w' = \epsilon_s w^{k_s} - h_s w^{l_s} - c_s w^{m_s} \int_{t_{s-1}}^t w^{n_s(n)} dn \quad (t_{s-1} < t < t_s) \dots\dots(1)$$

係数 ϵ_s , h_s , c_s 及び指数 k_s , l_s , m_s , n_s は、初期及び終期の各段階に対して適当な選択を施してある。

- (5) 本方程式に於いて、 $\epsilon_s w^{k_s}$ 項は、構成的全活動を示し、 $h_s w^{l_s}$ 項は、遅滞活動の全体を又積分項は残存活動を表現したものである。この形の方程式は甚だ厳密ではないにしても、これが成長する間は有機体に作用する反対影響を示し得るものである。

— 生物統計の不十分性 —

生物学の数的資料に関しては、若干附言する必要がある。凡て生物学的統計に於いては、重要な方法論的欠陥が見出されるもので、この様な動物成長に関する資料に於いては、各平均は、図式に充ちたもので、甚だ不経済極まる話である。更に困ったことは凡て無用な事を含む発表の中から、しかも異った動物の数より引き出されている。故に動物の食物摂取や、及び新陳代謝に関して、歎かわしい誤差が見出される。毎日動物によって消費せられる食物や新陳代謝、及び重量を、その年齢の函数として示せば次の如く書けるでもあろう。

$$\text{重量} = f(t) \quad \text{新陳代謝} = \phi(t) \quad \text{食物} = \psi(t)$$

これらの中二式より t を消去すれば次の型式を得る。

$$\text{新陳代謝} = F(w) \quad \text{一日食料} = \Phi(w)$$

又、同年齢でも、異った重量の動物観察によって、同じ生物学の変数間の差異は推論される。

$$\text{新陳代謝} = F_1(w) : \text{一日食料} = \Phi_1(w)$$

しかし、次の恒等式を意味するものではない。 $F_1(w) \equiv F_1(w) \quad \Phi(w) = \Phi_1(w)$

事実これらの函数は完全に異ったものであるのにこのような事情は屢々忘却されている。即ち一動物の重量及び新陳代謝間の真の関係は函数 F_1 によって示され、 F によっては示されないものである。動物の成長曲線は真に著しい特異性を持っているが、人間を除けば、これらの曲線は、決して最大を通過していない。

これは、動物生活の向上的部分をのみ観察したためであって、恰も老齡の動物が存在しないと云ったような意味を持っている。恐らく自然環境に於いては、動物は極端に外傷を受け易いと言う事に帰因されるからであろう。故に一般の意見と反対に、自然条件は動物にとって、全く不利で、人間の成長曲線に下降部分のあるのは、文明に負うものであると云う事が出来る。

2. 有機体による食料の活用

動物の吸収食料と、その活用間に、単純な関係を推論する事が出来る。本関係は S. Brody 及び R. C Procter によって演説された経験法則にもっともらしい説明を与えるもので、有機体により採取された純粋エネルギーと食料として吸収された大量のエネルギー X との間の関係に関するものである。Brody 及び Procter によれば、此の関係は次式によって示されたのである。

$$x = A(1 - e^{-mx}) \dots\dots\dots (2)$$

本式は又別の同じように単純な観察と等しく適宜に一致したもので置換され得る。その基礎は殆んど明白な二三の前提に立脚しているもので、広汎な应用到資する事が出来る。栄養エネルギーの大小量の活用は同法則にしたがわず、エネルギー A B の二大量は個々に純粋エネルギー a , b を生じ、共同的にも作用して純粋エネルギーを与えるものとするれば、

$$\frac{a+b}{1+k^2ab} < a+b \quad \text{である。}$$

(+) 符号によって生理学的合成の効力作用を示せば次の如くなる。

$$A(+)B = \frac{a+b}{1+k^2ab} \dots\dots\dots (3)$$

もし A 及び B が極めて少量であれば、近似式は次の如くである。

$$A(+)B \approx a+b \quad \dots\dots\dots (4)$$

大量エネルギー A より由来した真正エネルギー a は A に比例する。

$$a = \sigma A \quad \dots\dots\dots (5)$$

同様に、減法、乗法、除法の記号的効力は以上の生理学のものと解されたい。乗法に関しては、本節で行う問題に限っていえるもので以下次の如くである。

$$A(+)A = 2(\times)A = \frac{2a}{1+k^2a^2}$$

$$2A(+)A = 3(\times)A \equiv \frac{\frac{2a}{1+k^2a^2} + a}{1+k^2 \frac{2a}{1+k^2a^2} a} = \frac{3a+k^2a^3}{1+3k^2a^2}$$

$$\text{又} \quad n(\times)A = \frac{P_n(a)}{Q_n(a)} \dots\dots\dots (6)$$

と置けば容易に察知し得る事は多項式 $P_n(a)$, $Q_n(a)$ は次の関係を満足する事である。

$$\left. \begin{aligned} P_{n+1}(a) &= P_n(a) + a Q_n(a) \\ Q_{n+1}(a) &= Q_n(a) + k^2 a P_n(a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{又,} \quad P_n(a) = -P_n(-a) \quad Q_n(a) = Q_n(-a) \dots\dots\dots (8)$$

(7)式は次式を与える。

$$k P_n(a) + Q_n(a) = (1+ka)^n \dots\dots\dots (9)$$

これを(8)式と共にとれば、 $P_n(a)$ 及び $Q_n(a)$ の値を求める事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} P_n(a) &= \frac{(1+ka)^n - (1-ka)^n}{2k} \\ Q_n(a) &= \frac{(1+ka)^n + (1-ka)^n}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

よって最後に次式を得る。

$$n(\times)A = \frac{(1+ka)^n - (1-ka)^n}{k[(1+ka)^n + (1-ka)^n]} \dots\dots\dots (11)$$

A 及び a は小、 n は大であるとし、 a を σA で、 A を $\frac{X}{n}$, $n(X)A$ を x で天々置換すれば前式は次

の如くなるであろう。

$$x = \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{k\sigma X}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{k\sigma X}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{k\sigma X}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{k\sigma X}{n}\right)^n} \right]$$

又は

$$x = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{k\sigma X} - e^{-k\sigma X}}{e^{k\sigma X} + e^{-k\sigma X}} = \frac{1}{k} \operatorname{th}(k\sigma X) \dots\dots\dots (12)$$

k が十分小であれば(5)式は再び表はれて来る。真正エネルギーの可能な最大値は $\frac{1}{k}$ である。曲線(12)の形は曲線(2)と同様なもので、(12)は(2)と同様、Brody の数的資料を示している。未だ説明すべき重大な点がある。即ち、係数 $k\sigma$ の重量への依存性である。食料の消化性は重量の異った動物にとっては同一なものではないと考える事は先験的なものとして宜からう。Brody の図式及び(12)式はこの問題の解決を示唆しているが Illinois の牛 (Brody の記号法; Ill 牡犢 B) に関係した次の図式がある。平均重量 = 613 斤 $\frac{1}{k} = 38,500$ $\sigma k = 0.0000126$ で、これは次の値を与える。

$$\sigma = 0.48 \quad \frac{1}{kw} = 63$$

別の飼育牛 (牡犢 36PA) の図式は次の如くである。

$$\text{平均重量} = 433 \text{ 斤} \quad \frac{1}{k} = 24,000 \quad \sigma k = 0.0000195$$

$$\text{よって } \sigma = 0.47 \quad \frac{1}{kw} = 56$$

此の結果は最も興味がある。係数 σ は一種属の異った飼育に対して恒常な物理学的係数で、その一定性はこの理論を確認する事を勇気付けるものである。更に知られる事は、最大同化エネルギーは動物の重量に比例する。

$$\text{故に } \frac{1}{k} = \alpha w \dots\dots\dots (13)$$

で、一般的に観察を確認するものである。この条件に於いては、(12)式は次の如くなる。

$$x = \alpha w \operatorname{th} \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \right) \dots\dots\dots (14)$$

二つの極端な場合が示される。第一は $\frac{\sigma X}{\alpha w}$ が甚だ小なる時は、双曲正切函数を置換するのに次のような関係式を以て行う事が出来ると言う議論である。即ち、 x と X との関係であって、

$$x \simeq \sigma X \dots\dots\dots (5')$$

この場合は、個体の重量は明白に表われない。純粹エネルギーは単に X の介入によってのみ w に依存する。第二は $\frac{\sigma X}{\alpha w}$ 甚だ大きい時は、双曲正切函数は 1 に代へる事が出来る。

$$x \simeq \alpha w \dots\dots\dots (15)$$

即ち甚だ豊富な供給食料より動物の得た純粹エネルギーは、その個体重量に比例する。動物或長に関する理論に於いてこの方程式を使用する事は、又後に示そう。

3. 組織の成長

純粋に保護された培養液中に於いて、組織細片の残存成長に関連して、B. Ephrussi 及びG. Teissierは組織培養の成長に関する実験を行った。Carrelによれば、組織の残存活動性は有機体より採取された、組織の各片は、共に帯同していた小さな貯存量より起るものであると言う。此れ等培養の成長に関する諸要因中、著者が決定的役割を寄与したものは二つである。即ち、

- (1) ある実質の漸進的消費
- (2) 大多数核分裂の周辺の局限化。

である。 s を t 瞬間に於ける培養面積、 S を成長の終わった時の最終面積とすれば、当該問題としての微分方程式は次の形を取る。

$$s' = \mu s^2 (S - s) \quad \dots\dots\dots (16)$$

本式は単に、成長は周辺 s^2 並びに滋養物質の有効な貯存量に比例するものである事を意味する。この貯存量は計算され得る。その始めに当って、表面積の一片 s_0 は、貯存物質 αs_0 の量を含んでいる。時間 t の終りに於いて、面積は S となり、本成長は、面積増加 $S - s_0$ に比例する貯存量の消費によって行われる。時間 t に於いて、そのまま有効的に残った貯存量 e は次式に等しいであろう。

$$e = \alpha s_0 - \beta (S - s_0) = (\alpha + \beta) s_0 - \beta S$$

よって
$$S = s_0 \frac{\alpha + \beta}{\beta}$$

(16)式を積分すれば次の如くである。

$$s = S \left[\frac{(\sqrt{S} + \sqrt{s_0}) e^{\mu t \sqrt{S}} - (\sqrt{S} - \sqrt{s_0})}{(\sqrt{S} + \sqrt{s_0}) e^{\mu t \sqrt{S}} + (\sqrt{S} - \sqrt{s_0})} \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

これを単純化する為に次の如く置けば

$$S = s_0 \lambda^2 \quad \mu \sqrt{S} = \varepsilon = \mu \lambda \sqrt{s_0}$$

更に
$$\lambda^2 = \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 1$$

(17)式は次の如くなる。

$$S = \lambda^2 s_0 \left[\frac{(\lambda + 1) e^{\varepsilon t} - (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) e^{\varepsilon t} + (\lambda - 1)} \right]^2$$

本式は好都合にも実験資料を示し得るもので、特に同一係数 λ によって特徴付けられた二つの組織に対しては、最終面積は初期面積に比例する事を示す。この比例性と言うものは成長中に於いては指数 ε がある為に、存在しない。

第十二章 胚芽又は胎児の成長初期

1. 自由なる胚子

自由な胚芽の時代、即ち動植物に於ける胚子を考察してみよう。これは重量 w なる組織者及び重量 n なる栄養貯存物を含む一全体として、原型的に示す事が出来る。第一に本系統内及び本系統と外界との間に於ける凡ての変化は、常にこれらの重量に比例するものとし、第二に、単位時間の食料吸収は $aw + bwn$ に等しく、第三に単位時間における食料の構成的活用は第十一章公式(5)によって示され、又新陳代謝産物による中毒作用又は一連の極限要因を考える必要がなければ $\tau(aw + bwn)$ に等しく、第四に極限項は hw^2 に等しく、第五に毒作用は cwW に等しくこの W は次の積分式を示すものとする。

$$W = \int_0^t w dt$$

かくて、当面の方程式は次の形を取る。

$$\left. \begin{aligned} w' &= \tau(aw + bwn) - hw^2 - cwW \\ n' &= -aw - bwn \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これら方程式は容易に積分されて、(1)式の第二式は次式を与える。

$$n = \left(n_0 + \frac{a}{b} \right) e^{-bW} - \frac{a}{b} \dots\dots\dots (2)$$

(1)の第一式にこの n を代用し、 w' 及び w を W の項で示せば次の如くなる。

$$W'' + hW'^2 = \tau b W' \left(n_0 + \frac{a}{b} \right) e^{-bW} - cW'W$$

本式に e^{hW} を乗ずれば

$$(W'' + hW'^2) e^{hW} = \tau \left(n_0 b + a \right) W' e^{(h-b)W} - cW'W e^{hW}$$

を得る。積分に当って、

$$w = W' = F(W) \dots\dots\dots (3)$$

を得るが、これは次式の如くなるであろう。

$$F(W) = \frac{\tau(n_0 b + a)}{h - b} (e^{-bW} - e^{-hW}) + w_0 e^{-hW} - \frac{c}{h^2} e^{-hW} + \frac{c}{h^2} - \frac{cW}{h} \dots\dots\dots (4)$$

(3)式を積分すれば時間 t を W の函数として得る。

$$t = \int_0^w \frac{ds}{F(s)} \dots\dots\dots (5)$$

かくて、媒介変数の型式で、当該問題の完全な解決を得る。この解答を研究する為には組織者の比較的成長に対する方程式を書かねばならない。

$$\frac{w'}{w} = \left[\frac{h\tau(n_0 b + a)}{h - b} + \frac{c}{h} - w_0 h \right] e^{-hW} - \frac{b\tau(n_0 b + a)}{h - b} e^{-bW} - \frac{c}{h}$$

本理論曲線は三つの特殊点を持っている。

- (1) 函数 $F(W)$ は $W=W_\infty$ のある値に対し、0となる。これは $w=0$ に相当する。
- (2) 函数 w は、 $W=W_m < W_\infty$ のある値に対し0となり、これは $w=w_m$ の最大値に相当する。
- (3) 函数 n は W の次式のある値に対し、0となる。

$$W = W_c = \frac{1}{b} \log \left(1 + \frac{n_0 b}{a} \right) \dots\dots\dots (6)$$

本系統の運命は完全に食料供給に依存するものである。

— 第一の場合 —

食料の初期貯存量が不十分な為に、

$$\tau(n_0 b + a) < w_0 h \quad w'_0 < 0$$

となり、組織者の重量は減少し、胎児は変態の起らない限り、貯存量喪失前に死亡する。

— 第二の場合 —

初期貯存量が十分な為に

$$\tau(n_0 b + a) > w_0 h \quad w'_0 > 0$$

となり、胎児の重量は増加し始め、最大に達し、次に0に向う。変態は、最大値近傍に於いて起り、近似的に、栄養貯存物の消失の瞬間と一致しているように思う。これら二現象の同時発生の仮設は、組織者の原始重量を与える方程式 $W_c = W_n$ によって示される。

$$w_0 = \frac{1}{h} \left\{ - \left(\frac{c}{h} + \frac{ab\tau}{h-b} \right) \left(1 + n_0 \frac{b}{a} \right)^{\frac{h}{b}} + \frac{h\tau(n_0 b + a)}{h-b} + \frac{c}{h} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

本式は原始重量を栄養物質の貯存量 n_0 の函数として示したものである。

本論議に於いて、食料の活用は完全なものとは仮定されていない。又その逆も真であるとして、第十一章公式(15)を利用すれば、これは僅か異った形式を与える。

$$w' = \epsilon w - h w^2 - c w W, \quad n' = -a w - b w n \dots\dots\dots (8)$$

第一式は目新しいものではなく、これは又、最大を持っている曲線を与える。更に(6)式は食料の全消費の瞬間に於いて、 W の値を与えるものであって、もしこれら二瞬間が殆んど一致するものとすれば、変態は斯る臨界時期の近傍に於いて起るであろう。かくして第十一章(5)式(15)式の二つの可能性は同様な質的結果を与へるものである。

2. 母体内に於ける胎児

母体内にて発達した胎児は前節のそれと全く異った環境の下に於いて生活するものである。

これは、規則的に栄養を受け、代謝産物は多少とも除去される。これらの交換に於いては、表面積は成熟者の状態に於ける程重要な役割を演じない。極限要因のない場合は、胎児の生活均衡は積極的で、且つ重量に比例するものとなる事が想像される。この事より、第十一章(14)式に於いて X を λw にて置換すれば、我々は食料の活用率は重量に比例するものである事を見るであろう。

$$x = \alpha w t h \left(\frac{\sigma \lambda}{\alpha} \right)$$

基礎代謝及び機能の新陳代謝は0で、凡てこのエネルギーは成長に使用される。かくて、胎児発達の始めに於いては、再びMalthusの式に帰着する。 $w' = \epsilon w$

本式は極限項によって完成されることとなる。先づ胎児の成長と共に増加する一種機械的圧力がある。

更に胎児の諸細胞間に或る闘争がある事を豫知する事が出来る。最後に除去作用にもかかわらず、胎児それ自身より及び益々変調している母体組織より由来した代謝産物が蓄積される事も想像される近似的にもせよ、この反作用の量が如何程のものであるかを評価する事は極めて困難であるが、多少とも正確な表現式は次の如きものである。

$$w' = \epsilon w - h w^2 - c w W \dots\dots\dots (9)$$

本式は例の如く次の積分式を W にて示したものである。

$$W = \int_0^t w dt$$

我々にとって実際興味のある三つの場合に限り(9)式に於ける解答の特殊性を総括して見よう。

(1) 毒作用のない場合、これは数理論法則である。

$w(0) < \frac{\epsilon}{h}$ の時 w は増加し、 $\frac{\epsilon}{h}$ に接近する。

(2) $w(0)$ が甚だ小さい時は内部的闘争はなく、近似的に次式を得る。

$$w = \frac{4 \epsilon^4 w(0) e^{\epsilon t}}{[2 \epsilon^2 + w(0) c e^{\epsilon t}]^2} \dots\dots\dots (10)$$

最初、函数 w は増加し、次式に等しい最大に達する。

$$w_m = \frac{\epsilon^2}{2 C} \dots\dots\dots (11)$$

この時期は次の如き時である。

$$t_m = \frac{1}{\epsilon} \log \frac{2 \epsilon^2}{c w(0)} \dots\dots\dots (12)$$

そしてこの後 0 へ向い、減少する。

(3) 一般の場合に於いて、(9)式の解答は次の近似式によって示す事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{w(0) w_m}{w(0) + (w_m - w_0) e^{-\epsilon t}} \quad (0 < t < t_m) \\ w &= \frac{w_m}{c h^2 \frac{c(t-t_m)}{2}} \quad (t_m < 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

本式は w の最大値を w_m にて、又 w が最大に達する時間を t_m にて示したもので、 h が十分に小さい時は、此の時間は(12)式によって示される。最大値 w_m は次の式に等しい。

$$w_m = \frac{\epsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \log \left\{ \frac{c + \epsilon h - h^2 w(0)}{C} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

実験的証明は常に極めて困難である。これが理由は、統計資料は常に不完全であって、殺す事なく胎児を秤量する方法が見出されるまでは、不十分である。平均、各個体が単に一度表はれる場合は、分数は余りにも大となる為、質的結論以上のものを得る事は不可能である。我々は二三の数的実例を試みよう。

① 第1例 白 獺

此等の動物に対しては、次表の如き統計がある。13日目以前は、胎児が余りにも小さい為、使用し得る数字として表に示す事が出来ない。同様な理由の為に、13日目、14日目及び15日目に対する各図表の数字は疑問である。

年 齢 (日数)	重 量 (瓦)		年 齢 (日数)	重 量 (瓦)	
	観 察 数	理 論 数		観 察 数	理 論 数
13	0.040	0.063	19	1.58	1.64
14	0.112	0.112	20	2.63	2.54
15	0.168	0.196	21	3.98	3.68
16	0.310	0.342	22	4.63	4.73
17	0.548	0.590	出 産	4.68	—
18	1.000	1.00	—	—	—

しかし、これより若干の有益な結論を導く事が出来る。初期に於いては、極限及び毒作用は僅少であって、 w はMalthusの法則に依って示される。

$$w = w(0)e^{\epsilon t}$$

或は対数形にして次の如く書ける。

$$\log w = \log w(0) + \epsilon t \dots\dots\dots (15)$$

その結果、半対数的座標を有しつつ、成長の初期は直線(15)によって示されるであろう。もし、逆に、成長が個体の表面積に比例するとすれば同様な条件下に於いては次式を得る。

$$w' = \epsilon w^k + \dots\dots\dots (k \simeq \frac{2}{3})$$

$$w \simeq [\epsilon(1-k)t + w_0^{1-k}]^{\frac{1}{1-k}}$$

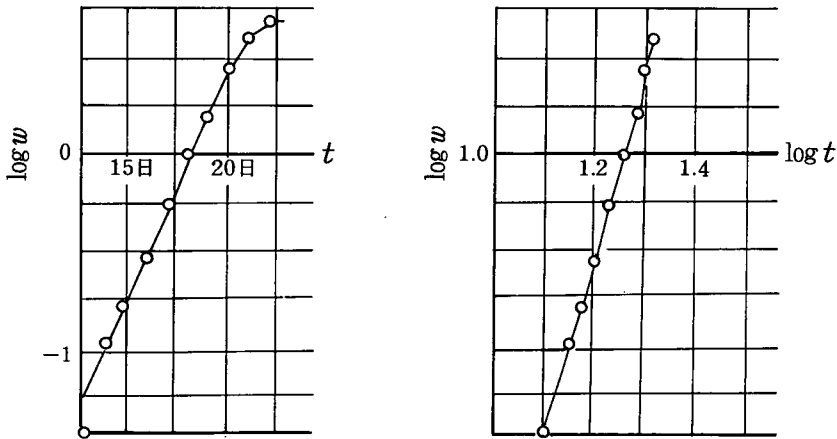
或は、 w_0 が甚だ小なれば、 $w \simeq [\epsilon(1-k)t]^{\frac{1}{1-k}}$

で、対数形では次の如くなる。

$$\log w \simeq \frac{\log[\epsilon(1-k)]}{1-k} + \frac{\log t}{1-k} \dots\dots\dots (16)$$

これより、対数座標を有する成長初期の $\log w$ $\log t$ は直線により示される。

第十図 白豚胎児の成長



白豚に対しては、(15)式の可能性は13日目より21日目まで実現されている。(第十図)

本結論は、これらの動物に於いては、純粋な胎児の成長は、各個体の重量に比例し、その面積には比例しないと言う事である。媒介変数 ϵ 及び w の初値は次式に等しい。

$$\epsilon = 0.53 \quad w_0 = 710^{-3}g$$

さて胎児成長の最終段階を考慮して見ると、数理論法則を適用すれば、毒作用がないと言う仮定は認容し難い事となり、事実、極限作用のみは21日目から、数理論法則と一致しておらず、最も著しい仕方においてのみ、認められるだけである。(9)式を改良するのに、内部的闘争は w のより高次な力に比例するものであることを考えるとすれば、

$$w' = \epsilon w - h w^{1+m} \quad (m > 1) \dots\dots\dots (17)$$

本方程式の解は次の如くである。

$$w = w(0) e^{\epsilon t m} \sqrt{\frac{\epsilon}{w_0 m h e^{\epsilon m t} + \epsilon - w_0 m h}} \dots\dots\dots (18)$$

白豚の場合に応用された本式は、 m に少くとも2なる値を与えれば胎児成長を示すことになる。恐らく $m \geq 2$ としても、正当なる事は見出されようがはっきりしていない。反対に、純粋なる毒作用を全く綿密に示す(10式は観察された成長曲線を表現している。もし、 $c = 0.0295$ ならば満足な曲線が得られ、 $t_m = 2.27$ 日に於いて最大に達するものである。 w の理論値は上表の第3列目に見出される。出産は臨界点直前に起るものに相違ない。

② 第2例 家兎

家兎に対しては次の図表がある。

t (日数)	14	16	18	20	22	24	26	28	30
w (観察)	0.16	0.37	0.94	1.61	5.52	11.0	25.0	40.0	60.0
w (理論)	0.17	0.40	0.94	2.17	4.96	11.0	25.4	41.6	59.7

第1例に於けるように、 $\log w$ は、媒介変数に対して次の値を有する(19式によって、26日目まで甚だ宜く示されている。

$$w(0) = 5.10^{-4}g \quad \epsilon = 0.415$$

曲線(10)は $t_m = 31.6$ $c = 0.0014$ で最大に達する。故に、白豚の場合に於ける如く出産は最大点直前に起るものである。 w の観察数と理論数との間の一致は、18日目まで密接であって、22日目以後も尚見られるが、期間19日より21日までの変異はやゝ大である。

③ 第3例 モルモット (Ibsen, Draper)

成長に関する統計資料の中で、ある程度確実性を示すIbsen (I)及びDraper (b)モルモットの胎児成長曲線を比較して見よう。

年齢 (日数)	20	30	40	50	60	64	67
重量 (g) I	0.062	1.32	9.4	36.3	62.5	—	96.6
重量 (g) D	0.080	1.50	10.1	29.9	61.6	84	—

半対数的直線式(15)は対数的直線式(16)より、宜く観察数を示している。したがって純粋な胎児成長は個体の重量に比例している。モルモットに於ける極限作用は、家兎及び白豚に於けるよりも甚だ早く認められる。(第十一図)

又、この場合、これら要因の二三が支配するとは言い難いが、両系列に於いて増加係数 ϵ は0.11に等しく、同様に

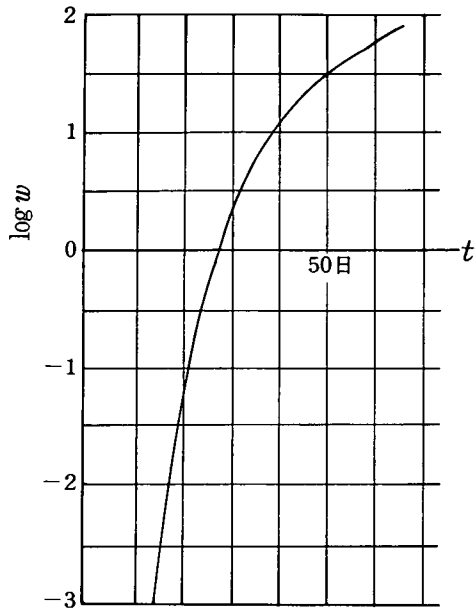
$$h = 0.0011 \quad w_0 = 0.22 \quad c = 0.00007$$

である。理論曲線は観察と極めて不完全に一致し、特に t の小なる値に対しては甚だしい。他の実例は多少とも、結論を得ることが出来るが要約すると、

- (1) 動物に於ける純粋に、胎児の成長は個体の重量に比例し、その面積には比例しない。
- (2) (9)式及びその二つの特別な場合は、かなり宜く観察と一致を示す。
- (3) ある二三の例に於いては残存作用は、内部的闘争の作用より更に重要なものと思われる。

この点に於いて注意される可き事は、残存作用の性質は必ずしも化学的なものではなくて、機械的又は物理的性質の残存効果の累積のように思われる。

第十一図 モルモットの胎児成長
(Ibsen 及び Draper)



第十三章 胚芽又は胎児の成長後期

1. 人間の成長

哺乳動物の胎児後の成長研究に於いては、新陳代謝及び栄養は、胎児発達の研究に於ける以上に遙かに、考慮される可きものである。更に、本経過は無数の段階に細分される事が出来る。各段階は、生活係数の恒常性を以て特徴付けられるのであるが、一段階より次の段階への移行に於いては、各諸係数は鋭い変化を示す。

我々は先づ人類の成長を考察し、更に臨界点の存在をよりよく明確に示す為に、次の方法を採用する事にしよう。成長微分方程式は次の形を取るものとし、明白に時間 t に無関係のものであるとする。

$$w' = F(w) \dots\dots\dots (1)$$

人類成長の数表を利用し、 w' の値を計算し、曲線 $F(w)$ を組立てよう。(第十二図)

本曲線を考えるのに、最初の18ヶ月間は成長が頗る早いが、以後緩慢となるのは、疑いもなくこれは食物の変化に原因し、その後9年目までは同様な値を殆んど維持している。この点で、再び成長は回復し、15乃至16年目まで増加する。これは w' の最大値である。後、急速に減少し、凡て30年目に於いて消失している。30年後は w' は負となる。本曲線の形は人類成長に関し、いろいろの期間についての特徴を示すもので1つの週期形を示す。第一段階は、呼吸摂食の時代で、甚だ高い w'

の値によって特色付けられ、以後、急速な減少によって、次代週期の水準にまで至る。

第2年目より第9年目までの重量の毎年増加は同一水準を維持し、僅少な増加傾向を有する。本期間中 w' は w のある方に比例するとすれば

$$w' = \epsilon w^k (1.5 < t < 9) \dots\dots\dots (2)$$

で極限要因は負である。この時の指数

k は正で $\frac{1}{3}$ を超えないものである。

$$0 \leq k \leq \frac{1}{3} \dots\dots\dots (3)$$

k のこの値は如何にして説明せられ得可きであろうか？

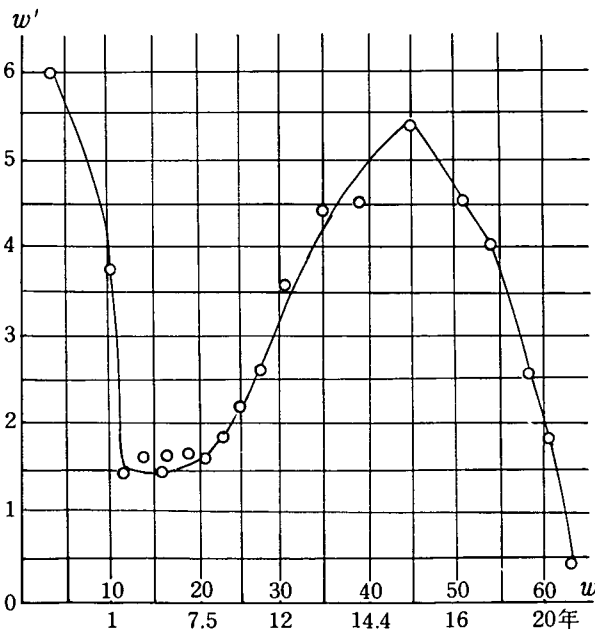
この点に於いて人間は他の動物と異ならない事は注意す可きである。

同様な現象は豚及び羊にも見出される。解説に当たり、再び重量 w の動物によって、大量のエネルギー X の活用を示した第十一章の(14式)に戻って試みて見よう。

$$x = \alpha w t h \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \right) \dots\dots\dots (4)$$

第十二図 人間に対する函数

$w' = F(w)$
(Queteletに依る)



人類の成長 (Quetelet に依る)

年 齡 (年)	身長 (l) (m)	重量 (w) (kg)	w'	l'	$w^{\frac{1}{3}}$	$\frac{w^{\frac{1}{3}}}{l}$
0	0.50	3.5	—	—	1.518	3.04
1	0.70	9.4	3.9	0.145	2.110	3.01
2	0.79	11.3	1.5	0.080	2.244	2.84
3	0.86	12.4	1.45	0.070	2.315	2.69
4	0.93	14.2	1.65	0.070	2.422	2.60
5	1.00	15.7	1.5	0.055	2.504	2.50
6	1.04	17.2	1.7	0.050	2.581	2.48
7	1.10	19.1	1.75	0.060	2.673	2.43
8	1.16	20.7	1.75	0.060	2.746	2.37
9	1.22	22.6	1.9	0.055	2.827	2.32
10	1.27	24.5	2.25	0.055	2.904	2.29
11	1.33	27.1	2.65	0.055	3.004	2.26
12	1.38	29.8	3.6	0.055	3.103	2.25
13	1.44	34.3	4.45	0.055	3.248	2.26
14	1.49	38.7	4.65	0.055	3.383	2.27
15	1.55	43.6	5.45	0.055	3.520	2.27
16	1.59	49.6	4.6	0.050	3.674	2.31
17	1.63	52.8	4.1	0.040	3.752	2.30
18	1.66	57.8	2.6	0.035	3.866	2.33
20	1.67	60.0	1.93	0.023	3.915	2.35
25	1.68	62.9	0.37	0.008	3.977	2.37
30	1.68	63.66	0.18	0.001	3.994	2.38
40	1.68	63.6	-0.01		3.991	2.38
50	1.67	63.4	-0.09		3.99	2.39
60	1.64	61.9	-0.20		3.96	2.41
70	1.62	59.5	-0.21		3.90	2.41
80	1.61	57.8			3.87	2.40
90	1.61	57.8			3.87	2.40

純粹エネルギーの一部は成長中の動物によって使用される。 x_c をこの構成的エネルギーとし、次の方程式によって x と関連させる。

$$x_c = x f(w) \dots \dots \dots (5)$$

(4)式より、この値によって x を置換すれば次式を得る

$$x_c = \alpha w f(w) th \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \right)$$

更に w' は x_c に比例す可きものである。

$$w' = \epsilon w^k = \gamma x_c = \gamma \alpha w f(w) th \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \right)$$

本式に依り函数 $f(w)$ を決定する事が出来る。

$$f(w) = \frac{\epsilon w^{k-1}}{\gamma \alpha th \frac{\sigma X}{\alpha w}} \dots\dots\dots (6)$$

二つの極端な場合が想像される。即ち $\frac{\sigma X}{\alpha w}$ が小さい時は、(6)式は次の如くなる。

$$f(w) = \frac{\epsilon w^k}{\sigma \gamma X} \dots\dots\dots (7)$$

又、 $\frac{\sigma X}{\alpha w}$ が大きい時は次式を得る。

$$f(w) = \frac{\epsilon w^{k-1}}{\gamma \alpha} \dots\dots\dots (8)$$

大量エネルギー X は w^{-m} に比例し、 m は $\frac{2}{3}$ と 1 の間にあるものとすれば(7)式は次の如く書かれる。

$$f(w) = E w^{k-m} \dots\dots\dots (7')$$

そして次の不等式が存立する。

$$0 \leq k \leq \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \leq m \leq 1$$

よって、(7)及び(8)両式は次の如く、置換され得る。

$$f(w) = H w^{-n} \dots\dots\dots (9)$$

本式に於いて n は次の不等式を満足するものである。

$$\frac{1}{3} \leq n \leq 1 \dots\dots\dots (10)$$

かくて、 $\frac{1}{3}$ より 1 まで変動する(綿状的成長 — 表面的成長 — 立方体的成長)。 w の力に x の構成的部分は逆比例するものとすれば、(3)式の限界内で、 k の値を説明し得る。又、次の解説も示唆され得る。Ephrussi 及び Teissier の組織の残存成長に関する実験によれば、周辺的成長の仮設は、観察とよく一致した。即ち斯る仮設は又、何等残存成長のない場合に対しても真であった。この場合に於いて、構成的エネルギー x_c 及び純粋なるエネルギー x との間に於ける関係は次式によって表わせる。

$$\frac{x_c}{x} = f(w) = \lambda w^{-\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (11)$$

又は x を(4)式の値で置換すれば次の如くなる。

$$x_c = \lambda \alpha w^{\frac{2}{3}} th \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \right)$$

$\frac{\sigma X}{\alpha w}$ が甚だ小の時は本式は次の如くなり

$$x_c \sim \lambda \sigma X w^{\frac{1}{3}} \sim A w^{m-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \leq m \leq 1 \right)$$

$\frac{\sigma X}{\alpha w}$ が大きい時は $x_c \sim \lambda \alpha w^{\frac{2}{3}}$ である。

9-10才の緩慢になり始めた成長は更に本時期に於いて促進される。若し成長の主要部分がなお(2)式によって、示されるものとすれば、 k は少くとも 1 に等しい値となろう。更に曲線 w 及び w' の

の形は、明らかに、極限要因の作用を示し、事実、方程式

$$w' = \varepsilon w - h w^2 - c w w$$

は媒介変数 $t_0 = 9$ 年 $\varepsilon = 0.09$ $h = 0.000023$ $c = 0.000007$ となり、観察を極めて宜く示している。 $k = 1$ と言う値は生理学的に如何に解釈すべきものであろうか？ 方程式に立ち戻って見るに $k = 1$ と置けば次式を得る。

$$f(w) = \frac{\varepsilon}{r \alpha t h \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \right)}$$

即ち二つの極端な場合に於いて次式を得る。

$$f(w) = \frac{\varepsilon w}{r \sigma X} \quad \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \text{ 小なる時} \right)$$

$$f(w) = \frac{\varepsilon}{r \alpha} \quad \left(\frac{\sigma X}{\alpha w} \text{ 大なる時} \right)$$

故に 9-10 年後は構成的エネルギーは、食料より有機体の獲得した純粋エネルギーに比例するものである事がわかる。この事から、本年齢に於いては、一段階より次段階に到るまでに急断的な過程が存する。この増加成長は更に完全な構成的活用に伴われて、早期の段階では見られなかった抵抗を必要に応じて引き起こしてくる。恐らく、この変化を性腺活動の初期に帰因させる事や及びこれら諸多の腺に於ける合成作用に帰着させることが出来よう。総じて変化の行われるのは、9-10 才の年齢で成長の最大強度に達するのは 15-16 才の年齢に於いてである。この仮定的要因なくしては有機体は速かに死亡するものであろうと思はれるが、果して種属進化の痕跡を本要因及び臨界時点に表われる類似の要因中に見出せるかどうか？

各種属は臨界点を通ずる事や及び淘汰によって発展し、強められた新要因が導入し、該種属をして生残せしめる能力を与へる事は、起り得可き事である。個体の線状的成長に関して若干付言すれば、図表第 5 列は、身長増加 l' は函数 w' と甚だ異なるもので、 $t = 0$ より $t = 4$ 年まで、又 15 年以後は急速に減少するもので、4 年より 15 までは殆んど一定のままに存続するものである事を示し、図表最終列は商 $\frac{w}{l}$ を与へるものである。もし個体の成長が同様な仮設にあるとすれば $\frac{w}{l}$ 率は変化せず一定に存続する。然し本率が最初減少し、凡そ 12 年目に於いて最小を通過し、後増加しているのは、12 年目までは身長増加は更に急速ではあるが、12 年以後は重量増加に比してそれ程激しくない事を示すものである。以上は一重量増加と身長増加との間に深奥なる差があると言うことを示しており、基礎代謝と次式より計算された個体の表面積との間に観察された差を説明するものである。

$$\text{表面積} \sim \mu w^{\frac{2}{3}}$$

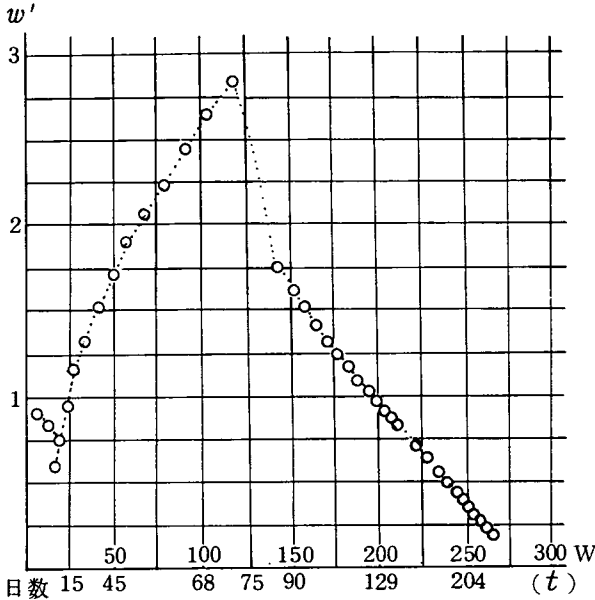
2. 哺乳動物

成長問題は、温血動物と冷血動物とに於いては同じものではなく、前者では、人間の様な発展に於ける臨界時点、即ち成長曲線に於ける鋭角点が観察せられるもので、動物成長を単純な公式によって示そうとする希望は断念しなければならぬ。この成長曲線の不連続性は最初、Lotka によって建てられ、更に本現象の細部研究は、これを J.S Huxley 及び G. Teissier に負うものである。

第十三図 獺に対する函数

$$w' = F(w)$$

(Donaldsonに依る)



— 獺 —

統計学者として、成長問題を取扱った Lotka は、獺の生活に於ける最初の三ヶ月は数理論曲線で示す事が出来るが、以後本曲線は、実際に観察したものより遙に低い値を与える事を記述したものである。

事実、この獺の最初三ヶ月の生活は、極めて密接ではないにしても略々数理論曲線によって示されるもので、これを確認する為には、獺の経験的曲線を眺めれば宜い。(第十三図) 恰も人間に於けると同じく、臨界点を示している。この点の第一は20日の年齢で起り、成長相を w' の殆んど一定なるものと次の時相、即ち w' の急速に増加するものとに区分している。これは75日目まで持続し、その後 w' は全く急激に減少し、殆んど一直線をなして、凡そ290日目まで0に達している。曲線(1)は、獺の発達には少くとも三つの異った年齢相より成っていることを明白に示している。

一見不思議な事は、微分方程式

$$w' = \epsilon w^{\frac{1}{3}} - h w^{\frac{5}{3}} \dots\dots\dots (12)$$

が、次型の如き成長法則に到る事である。

$$w = A [th \lambda (t + \tau)]^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots (13)$$

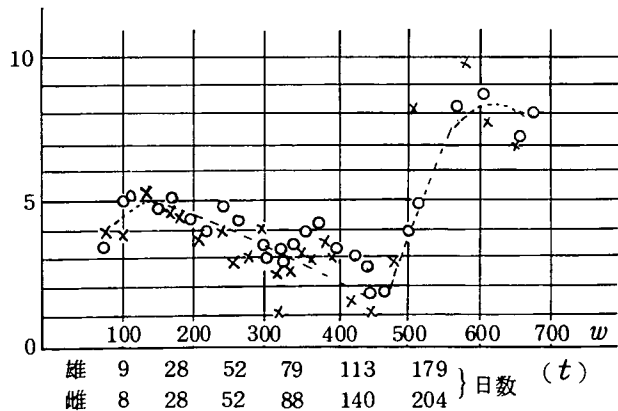
即ち、本式は成長全期間を通じ、獺の重量 w をよく示すのであるが、曲線(12)は何等第十三図のそれと一致していない。

— Minot によるモルモット —

Minot によるモルモットの成長曲線は、甚だ興味のあるものである。曲線(第十四図)は最小時点によって別れた二つの最大点を通して。最初の最大は15日目付近で起り、最小は100日目付近で起り、第二の最大は180日目付近で起っている。最初の最大の後、弱められた成長エネルギーは恰もこの瞬間までかくされた要因の影響の下で再び働き出しているようである。本現象は有機体の若返りにも喩える事が出来よう。羊の成長は驚異的にもよく次次に

第十四図 モルモットの函数

$$w' = F(w) \text{ (Minotに依る)}$$



よって示される。

$$w' = a - bw \quad w = w - (w - w_0) e^{-at} \dots\dots\dots (14)$$

これは若干の種属に対しても真である。大なる家畜に於いても、母乳より牧草への転換に対しては、臨界点がある。同様に夏より冬の体制へと変化するものと一致して季節的臨界点があり、また、この逆の場合もある。恐らくこれらの変化は単に係数に影響を与えるのみならず、同様に指数にも変化を与えよう。故にこれらの季節的変異は常に年度別統計の研究に於いて斟酌されなければならない。

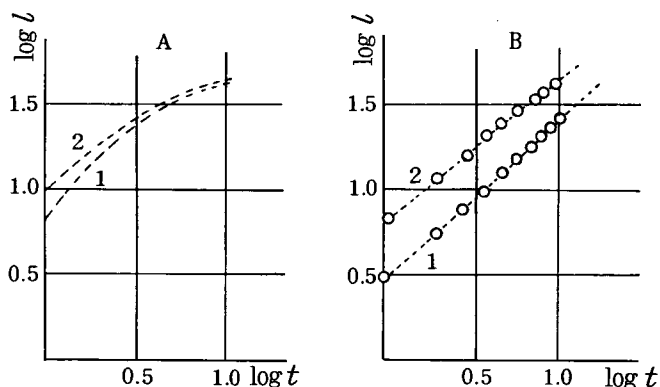
3. 魚 類

魚類の成長は、又若干興味のある特異性を示している。我々は、一種属を分割させて、変種の多様性を生じさせる地理学的要因の重要性を示す例を選んで見よう。ソ連邦に於けるヨーロッパ地方の新鮮な清水で Wasnetzoff は鯛の成長に関する極めて完全な統計を与えた。此の広大な地域は四海に注ぐ河川の流域地方を含み、概略的に区分すれば二地域に細分される。その一つはバルチック海及び北水洋をうるほし、他は黒海及びカスピアン海に注ぐものである。

恐らく北方地域の鯛の成長は南方地域のそれと異った法則に依って支配されるのかも知れない。第十五図 A, B は、これ等二地域の鯛に関する成長曲線間の比較を与えている。横座標は年齢の対数を与え、縦座標は個体の長さに関する対数を与える。これより判明して来る事は次の如き事である。

- (1) 北方鯛の初期の長さは、南方鯛のそれよりも小である。
- (2) 北方鯛の成長曲線は殆んど直線で囲まれたものなのであるが、南方鯛の成長曲線は横座標に向っている。初期の長さに於ける差は、気

第十五図 鯛の成長
(Wasnetzoff に依る)



- A 南方地域の鯛
 ① ボルガールカスピアン地方
 ② アゾフ地方
- B 北方地域の鯛
 ① ツンストラ湖
 ② ポスコブ湖

候的要因の作用によって説明されるもので、南方鯛の極限要因の遅滞作用は更に説明が困難である。これには多くの仮設が示唆されているが、中でも最も真実と思われるものは、異った気候要因の影響下で、既に完成されたと思われる、二種類の現象を観察する事である。初期段階に於いては、鯛の成長は次式によって示されるであろう。

$$l = l_1 t^i$$

l_1, i の二つの平均値は次表の如くである。

鯛	l_1	i
北方地域	5.1	0.87
南方地域	8.1	1.06

i の値は、殆んど1と大差なく、南方種の全曲線は次式により計算される事が出来る。

$$l = L - (L - l_0) c^{\frac{h t}{3}} \dots\dots\dots (15)$$

これは次の微分方程式に該当するものである。

$$l' = \frac{h}{3} (L - l) \quad w' = \epsilon w^{\frac{2}{3}} - h w \dots\dots\dots (16)$$

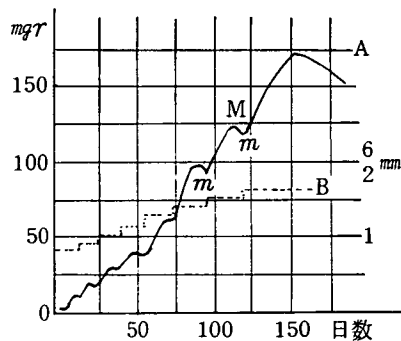
平均 $i = 1$ の近傍に於いて、指数 i が相当の偏差を示している事は、長さが重量に関する立方根に比例しないと言う事実によって説明せられるべきである。

4. 成長と脱皮

多くの動物に於いて、脱皮と成長間の関係は興味のある数学的方式を取るものである。節足動物では、脱皮間の線状成長は、硬い角素骨格によって妨げられるが、重量増加は連続的に起り、脱皮に際して動物は窮屈な皮を脱ぎ、重量に更に適した別個の皮膚へと変化する。やがて動物は新体制に自身を即応せしめる。Przibram 及び M \acute{e} gusar は、個体の各細胞の二倍に相当して、一脱皮より次の脱皮間に於いて、節足動物の重量は倍加すると見た。それ故、線状的延長は一脱皮より次の脱皮まで $\sqrt[3]{2} = 1.26$ の割合で増加する筈である。本法則は、多くの異例があるが、観察に依って確認されたものである。ある異常的な場合に於いても、線的延長は一脱皮後 $1.59 = 1.26^2$ 又は $2 = 1.26^3$ によって倍加されている。

Przibram の法則は客観的真實性と一致するものであるが、成長をしてそれより分散させる多くの要因も又ある。ある一面に於いては、成長というものは必ずしも、同性質的には行われるものでなく、他面、動物個体は、複合的な内外構造を持っているので、個体の器官及び各部分は、重量に比例して成長するものとは限らない。最後は、脊椎動物に於けるように無脊椎動物に於いても、極限要因が介在してくる。これらの要因は、二つの方法に於いて作用する。即ち二脱皮間の時間は間隔を増加するか、又は一脱皮及び次の脱皮間の成長を變形させるかの何れかである。時間的間隔の延長は若干の成長曲線に於いて見られる。例えば *Dixippus morosus* (直翅類) 及び *Tenebrio molitor* (鞘翅類) の場合に於ける様なものである。*Tenebrio molitor* の二脱皮間の重量増加に対する曲線は、残存作用の場合に於ける成長曲線に類似している。最初、重量は急速に増加し、次に増加は遅滞し、重量は、次の脱皮の若干前に最大に到達して、終に減少する。脱皮はその間に介入し、次の循環が始まる一脱皮前に斯る重量減少を生ぜしめる要因に関して、その性質を決定する事は甚だ興味のある事であろう。組織の脱水作用は、化学的作用と同様に示唆されるがこれは Ilyin の実験が示した様に、数学的の意味に於いて、“遺伝”型の作用を生じさせる要因である。

第十六図 *Tenebrio molitor* の各個体成長 (Teissier に依る)



A. 時間的函数の重量 B. 時間的函数の角の延長
m, m 脱皮型に一致した最小 M. 脱皮に稍々先行した最大

5. 個体の器官及び各部の成長

全重量 w の動物に於いて、一器官の重量を q で示せば、これらの二量とを関係させる経験的法則は

$$q = Kw^f \text{ である。} \dots\dots\dots (17)$$

又は対数型にすれば次の如くである。

$$\log q = \log K + t \log w \dots\dots\dots (18)$$

本法則は、多数の観察に基くものであって、w及びqの変異は全く広汎な範囲に及んでいる。このwに関連して、qの成長曲線は、対数座標で示せば直線又は直線の要素より成る屈折線である。此処に一つの問題がある。即ち(17)式の意味及びこの値である。若し器官の成長が個体の重量に比例するとすれば、 i は1に等しくなるであろう。然し i は殆んど常に1と異り、正直に言えば、これが1であるべき何等の理由もないのである。多くの場合、器官は表面的に形成されると考えられるが、此の場合の問題は、個体の外表面ではなく、胎児組織の表面積、即ち、その皺畳、翻転、畳嵌等で、個体の発展及びその構成等の増殖や生産と言うものを説明するものなのである。

表面隆起物即ち瘤等は、これが有している表面部分を通して、養はれると想像する事が出来るから、もし斯る隆起物の重量は本面積に比例するもので、個体の重量には比例しないものである。この事は私が事物は常にこのような方法で起ると言っているのではない。 i が1と異ると言う仮設は凡ゆる場合に於いて、 i なるものが1に等しくある可きであるとするよりは、遙に事実に対応しいと思われるからである。G Teissier は指数 i が1と異った時、(17)型の法則を“不調和の法則”と呼んだ。しかし、 $i=1$ の時でも不調和で、 $i \neq 1$ の時でも不調和とならない様な事もあろ。この観点を確認する為に二つの数約実例を考慮して見よう。即ち狼の心臓に於ける特別な場合に於いては、 $i=0.75$ で、他の経験法則との比較により i のこの値の解説を与える事が出来る。狼の個体の長さは、又(17)型の法則に従う。 $l = Lw^{0.3} \dots\dots\dots (19)$

そして個体の表面積は次の形で示す事が出来る。

$$s = Sw^{0.7} \dots\dots\dots (20)$$

よって狼の心臓の重量は個体の面積に比例する。他の場合は、Dixippus morosus (直翅類)に關するもので、G Teissierはこれが全長、腹部長、前胸部長、頭長、眼径をその生活の異った周期相に於いて計測した。w及びlを夫々の個体の重量及び長さとして、 w_1 及び l_1 を頭の重量及び長さ w_2 及び l_2 を眼の重量及び直径とする。

$$l = Lw^{\frac{1}{3}} \quad l_1 = L_1 w_1^{\frac{1}{3}} \quad l_2 = L_2 w_2^{\frac{1}{3}}$$

とし、更に、頭部は個体の表面隆起とし、眼部は頭部の表面隆起とする。この条件の下で次式を得る。

$$w_1 = W_1 w^{\frac{2}{3}} = Q_1 l^2 \quad w_2 = W_2 w_1^{\frac{2}{3}} = Q_2 l^{\frac{4}{3}}$$

したがって、 $l_1 = \lambda_1 l^{\frac{2}{3}}$, $l_2 = \lambda_2 l^{\frac{4}{3}} \dots\dots\dots (21)$

個体の長さは、aに比例して増加するとする。

$$l' = a l$$

(21)式は $l_1 l_2$ のこれに相当した値は次の如くなる。

$$l'_1 = \lambda_1 a^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}} \quad l'_2 = \lambda_2 a^{\frac{4}{3}} l^{\frac{4}{3}}$$

よって $\frac{l'}{l} = a \quad \frac{l'_1}{l_1} = a^{\frac{2}{3}} \quad \frac{l'_2}{l_2} = a^{\frac{4}{3}} \dots\dots\dots (22)$

次表は、Teissier によって観察された値及び(22)式より計算された値を与える。

たとへこれらの計算は若干不正確を伴ってはいるものの、その一致は著しいものがある。使用されている仮設は極めて近似的であって、多くの重要な修正を必要とするものではあるが、この特別な場合に於いては、これらは完全に観察現象を説明する。

l	15	19	28	37	46	64	85
l_1	1.15	1.35	1.65	2.1	2.6	3.1	3.8
l_2	0.38	0.43	0.47	0.57	0.65	0.75	0.85
$a = \frac{l'}{l}$	1	1.27	1.87	2.47	3.07	4.27	5.67
$a^{\frac{2}{3}} = \frac{l'_1}{l_1}$ (觀察)	1	1.09	1.43	1.83	2.26	2.70	3.30
$\frac{l'_1}{l_1}$ (理論)	1	1.17	1.52	1.83	2.12	2.62	3.18
$a^{\frac{4}{9}} = \frac{l'_2}{l_2}$ (觀察)	1	1.13	1.24	1.50	1.71	1.97	2.24
$\frac{l'_2}{l_2}$ (理論)	1	1.11	1.32	1.49	1.64	1.90	2.16

第十四章 生活体の形態

本章に於いては、一有機体の経済に於ける相称性及び極性の役割、及び生活体の外形に於ける運動の役割に関して若干の注意をするに止める。

1. 相称性及び極性

多くの場合、生活体の形態は、一点、一軸、又は一平面に関して相称なもので、更に、内面又は周辺の何れにせよ、該有機体の相称型に関係した位置に、活動の核心か又は中心が存在する事が屢々である。本現象は、“有機体の経済原則” 最小消費の最大効果、及び安全性を考えることによって説明される。数学的見地から見ればこれらの二原則は極端な問題に於いて統一され、この問題に於いて、最大最小何れかの極限值を持つ式をひき起こす条件とは何かという問題となる。生活動物の形態が、凡て、このようになるとは言えないが一般的傾向としてはあり得る。

— 球体 —

球状形態のものより始める。同一表面積の凡ての個体中、球体は最大容積を有し、同一容積の凡ての個体中、球体は最小表面積を有するものである。これら二極端の原則は、生活体及びその環境間との交換に於いて、重要である。これらの幾何学的考察が、物理化学的勢力の研究によって補足される時は、球体は平衡図式となり、かくて液体の凸状塊は、同質、異質及び層状の何れにせよ、流体静力学的の圧力、滲透圧、毛細管引力及び粘性の作用の下に於いて一球体の形状を取り、これは他の勢力がない場合、又は内部的移動のない場合には一つの可能な、単なる平衡形である。もし不規則な塊体が若干の部分に区分せられるとすれば、これらは橙形を帯びる事は極めてあり得可き事である。若し橙形塊に於いて周囲との滲透平衡が攪乱されるとすれば、本塊はその容積を変えるがその橙形は保持されるものである。

— 橙形体及び楕円体 —

幾何学的中心と、殆んど一致した活動焦点を生活体を持つ時は、放射相称型を持つが、本形の如きは比較的稀有である。故に活動焦点の現出は橙形より、細長又は平坦な楕円形への変換を生ずる。引力の介入は、細胞形成物質の分布をして何等中心的なものにはせず、内部的の複雑はこれら諸原因の一つ又は此等の複合作用に帰因して、放射相称に代って、軸的対称を生ずる事になる。これが橙形体を変えてくる。表面の特殊化は光に伴って、毛細管張力、及び滲透圧は一極より他の極へと変ってくる。

— 運動 —

ある一有機体が、繊毛作用、脈膊振動、又はその他の方法で自身を推進するものとすれば、垂直運動の場合に於いては、軸的対称性は維持されるが、水平運動では、本運動の正常速度の増加につれて、変形してくる。個体は軸的対称を失い、これに代って、平面に対して対称となる。本現象は最も共通的な一般の場合である。

— 分裂 —

今、諸有機体によって活用される平衡攪乱を考慮して見よう。他の個体の接近は、直接に又は導入によって、表面滲透性の局部的変化や仮足体の出現を生ずるのであろう。表面に於ける刺戟の作用が止む時は、仮足体も消失するが、これも同様に説明され得る。有機体にとって一見甚だ不利なように見える本現象は、終には甚だ有利に使用されるに至る事は奇妙である。細胞分裂は又別個の平衡攪乱形であって、別の関係に於いて、Henry Poincaré は天体構成を論じ、Newton の分子牽引力の下に於いて廻転する同質流動体の平衡形問題を研究した。我々が今取扱っているものとは甚だ異なるものではあるが、本問題は極めて有用な類推や示唆を与えるもので、分っていることは、天体の楕形は安定であって、更に二楕形体より成っている。地球 — 月の系統も安定であるということである。しかし本系統は単純なガス状塊の勃発によって、形成され、安定性の喪失に由るものである事はうなづける。したがって地球 — 月の系統の現状を、その仮説的な遠い過去即ち単純なガス状塊と比較して見ると、我々はその初期、その終期に於いて一連の安定形を見出すと同時に、又何等かの未知な中間時点で、それらの安定性が喪失された事も見出される。同様に細胞又は原生動物でも、分裂前は比較的安定であって、二娘細胞は分裂後も暫らくは安定となるが、一連鎖のこれら2終末の間には、安定性を攪乱した一環によって分割されている。一連の平衡形を論じた Henry Poincaré は本連系に於いて、第一の安定性と第二の安定性とに間に、新しい一連の平衡形を特徴付ける臨界点が存在する事を証明したのである。かくして、ガス状塊の二分割塊への分裂は予見されるのであるが、恐らく、同様な現象は細胞にも起るものであろう。楕形は安定なものではあるが、又一方平衡に於ける勢力も、例えば細胞集塊等、或る限界を越えない限りは、現存しており、これらは、凡て現在存在している要因に依存したある不等式を満足するものである。このような限界の近傍で安定性は消失し、最小の外的作用又は僅少な内的不相称は、形態の変換を生ずるか或は二つ以上の細部へと本塊状を分裂せしめる。

— 受精卵の分裂 —

卵の特別な場合においては、四つの興味ある状態がある。

- (1) 受精しない卵は真に驚く可き安定性を持っている。
- (2) 安定性の最初の破壊は、細胞核まで穿入した他の個体に原因し、第一分裂面は卵の二極及び精子進路を通って行われる。
- (3) 次の分裂は何等外的刺戟を必要としない。
- (4) 最初の二分分裂は、ある相称性を保持し、ある程度、原卵に類似した四個の胚芽境界線を生ずるが、その後の分裂は更に一層深い差異を示す。

この最終の特異性は対称軸を通過して行われる第一分裂面によって説明せられ、第二分裂より結果された四つの胚芽境界線は細長形を有し、赤道区域では安定度が最小なものであって、これは第三分裂の方角を解明するものである。更に卵の同質でない層疊は第三分裂より結果された四つの顕微鏡的境界線と四つの肉眼的境界線との間の差を示すものである。全く単純な幾何学的及び物理学的考察により、本過程の若干の諸相を説明し得ると思われる。我々は多細胞有機体が形成された後の段階は行わない。

以上の事柄程は明らかではないものがある。それは自動機構である。これは第一安定性の喪失後、凡てのこれらの分裂を遂行するもので、これら連続した分裂は、単性生殖の発展も同様である。故に、外来体の存在に帰因させられないもので、恰も本質的に不安定系統が続くように進行する。そしてこれからの解放動因が働らくまで存続する。

これは安定性諸週期によって区分されよう。一般に一連の同様な世代を生ずる単細胞の分裂とは、著しくその趣きを異にしている。

2. 環境、運動及び形態

生活有機体の形状は一般に多種多様な要因に依存しているが、ある場合に於いてはこれらの諸要因中、一小群の作用が支配することがある。これは魚類の場合であって、水中で積極的に活動生活を行い、時には水面外へ運動する事もある。同様な形では他の動物に於いても、輻合現象によって見出される。しかしその起源及び内部構造に於いては魚類と甚だ異っている。先ず空中動力学、及び流体動力学より得る若干の実験的、及び理論的結果を考察して見よう。流体中を移動する個体は、動力推進機、速度及び方向を変化させる方法や、及び安定装置等を必要とする。技術的問題は多少とも経済的の解決を必要とするかも知れない。

先ず水平運動と垂直運動とは区別されねばならない。流体環境に於ける水平運動では、何かに支えられて運動するのではなくして、速度を生じ、維持し、変更させて行く動力による推進機、及びある水準面を維持するための懸帯が必要である。先ず前進を考えて見ると推進は媒体の抵抗及び摩擦によって阻害される。抵抗は速度の二乗及び媒体の密度に比例する。

$$R = k \rho v^2$$

ただし R は抵抗で、 ρ は密度、 v は速度、 k は個体の大きさ体積及び形に依存した常数である。空中動力学の実験は、時には球体、円筒体及びその他の形体等よりも魚形体の方が遙に利益は大きい。魚形体は、極めて小さな球体よりも、労力が少くて、流体中を運動し得る。恐らく、この理由は、これが周囲の不連続性を持つ流体、即ち異った条件の地域に区分される流体のあり方に原因がある。個体及び媒体間の摩擦は屢々無視されるが、条件の異った二流体地域間の粘性は、廻転運動及びその前後時には運動体の側面に於ける渦巻旋回に便宜であり、これらの渦巻廻転運動は、驚く可き程度までの抵抗を増大する。又この推進機が作用して、どうしても周囲が攪乱されてしまうような時は、この運動に伴って、時には、この粘性が働らくことがある。又時には、自身を分離させる事もある。そしてこれらの吸引作用は抵抗の増加を生ぜしめる事等もある。しかしこの地域及び個体それ自身によって形成された全系統はある種の魚状型を現出せしめる。本系統が固定されてくると流動は見事にそれ自身をこの魚状型に適応させ、この個体の運動に帰因する不連続性は、死水（後部に渦巻く水）及び渦巻、その他のものを作らず上手に対応して行く。

実験の示す如に依れば、ある速度に対して、魚型体の大きさの間に最適な関係があり、若し個体の長さが大き過ぎると、渦巻は後部・表面のある臨界相に於いて出てくる、又余りに短か過ぎれば、渦巻はその前後面に現われてくる。この魚類の形状と運動間の関係を把握した功績は、Frédéric Houssay に負うものであるが、彼は、鰭の位置と一致した地点にこれら臨界危険地区がある事を、又予言した。しかし彼は、渦巻の性質やその実際の役割については誤解したようである。このため、彼の流体動力学の類推は疑問がある。

次に垂直運動を述べよう。先ず個体の重量及び同容積を有する流体の重量間に於ける差である。この小さな学術的問題は水の場合では至極簡単に解き得るもので、魚類の密度と水の密度との差は極めて僅少である。空気に関してはやや難しい。鳥類及び昆虫類の特殊な重力は、たとえ、組織が特殊な配列をされると言われるが尚、空気の密度より遙に大きいままに、残存する。航空技術は垂直運動に関して次の四つの方法をとっている。

(1) 垂直上昇飛行機に於けるような特殊な垂直推進機。

(2) 軽気球に於けるような特殊な重力の差。

(3) 傾斜面と連関した水平推進機。

(4) 大気に於ける垂直気流

等である。凡てこれらの方法は生活体によって使用されているもので、この外、未だ我々の技術では再現する事に成功しなかったものもある。即ち浮囊は、魚類の特殊重力を変更するに役立つが、安定化のために意図されたものではない。鱗は、又傾斜面の役割を演じている。若干の側に於いては、魚類の全個体はある Trygonid (三角体) に於けるように、傾斜翼へと変形される事がある。これらの魚類は密接に、飛行機又は水上飛行機に類似している。この媒体への形状的適応は、凡て他の垂直方向の形をとらない。これらは誠に、よく経済原理を説明している。魚類中には空気中、及び水中の、異った二つの媒体中で、自身を推進せしめ得るものがある。即ち飛魚なるものがそれで、この極めて著しい空中動力的な形状は、よく発達した胸鱗と共に、凡て飛行機のそれに匹敵するものであり、水中では、尾鱗は推進機として作用し、恰も舟艇後尾の鱗の如く断続作用を営んでいる。この推進機があつて始めて、魚をして、水中より離れさせ、かなり、長い空中滑走を遂行させる、初期の飛翔運動が与えられている。このような魚類の様態に関する、M. Schouleikine の実験によれば、風道気流中にこれらの魚類がいる時は、これらの鱗翼は、飛翔中の魚の体重を支えるに、全く十分なものであると言う。が更に飛魚等は、上昇気流をも利用しているようである。

次に鳥類の形状については、その推進機としては魚類のそれとは、異っているが、やはり同一原理によって行われているので多言を要しないがただ鳥類は、かれらの消費するエネルギーをして、最小にさせるような、上昇気流と言うものを活用していると言うことが言える。

第十五章 進 化

1. 生命とエントロピー（熱力学的機能）

進化問題を始めるに当って、この言葉の正確な意味を理解する必要がある。現在、行われている凡ての定義は、二つの極端論の間を彷徨している。或る者は、この言葉を、凡て自然的過程の何れにも適用し、不動性と進化を対比せしめ、或る者は進歩の表現であると見なして、進行的、上昇的及び平均化に反対な凡てのものを進化と記載している。前者は客観的態度を保持しようとし、後者は一般的に有望性の色彩、或はその傾向によっては絶望性の色彩をも画くものである。私は最も、ありふれた通常の状態より他の別な、左程ありそうもないと見れるような状態へ行くといったもの即ち、エントロピー増加に反する、ある状態へと変化する、凡ゆる過程にこの進化という言葉を採用することにする。これによって量的定義が与えられるように思うが、本定義の難点は、これを部分的の過程、又は循環過程の上昇部位に適用する際、自身を失い、実体のないものとなるおそれがある。一つの弁別を決める事が至難である事は恰も穀物の粒積に関する逆説にも似ている。しかし、一連の累積は存するもので、しかも一粒穀物とは甚だ異っている。即ち進化と言うものは厳存するが、特殊な過程、更に進化では上昇的なものでも、進化という意味と甚だしく異っているものなのである。

— 進化局限、エントロピー一般 —

この点に於いて極めて重要な弁別が行われるのは、即ち局部的傾向と一般的傾向との間に於いてである。後者は、何等疑問なく、更に通常なる状態へと、もし、本状態が未だ達せられていないものとするれば、移動する。しかし局部的傾向は上昇又は下降のものとなる筈で、前者の確率は後者の確率より遙に小さい。しかし0でない。わずかながら通常の状態が実現する事は不可能ではなく、そしてこの状態が何等実現しないと言うことは余りない。故に進化は時間、空間何れも高度に局限化せられた、甚だしい稀有の現象でもあろう。極めて稀に、しかし多少とも規則的に実現される結合はある種の区分された世界にある。もし事象がこれら偶然の結合によるものとするれば、各微小分子は、局部的現象となるが、これらの集積は一般的の性格を帯び、十分長期間存続すれば、生活体として、ありそうもないことが起り得る。したがって、生命とは甚だ僅少にのみ、起り得可き事件の、上昇連鎖に於ける一環で、これが実現は、確率公算と厳密に一致している。この上昇は終末する事なく、その最終段階は生命の出現より人類意識の出現にまで行くべきものである。事実、この前進は大きな浪費であり、この適応が自然の持っている弱点というものもさげられない。即ち存続しなかった種属、化膿する前又は受精する前、孵化する前に死滅した凡ての胚種等は、皆その不完全性を示したものであると言えよう。しかし現在残っている生活体は、何等かの方法に於いて、兎に角、人生の運命に於ける勝利者である。この観点より考察すれば、生活過程は、最早エントロピー法則の例外ではあり得なく、却って最も著しい確証でもあろう。

2. 生存競争と淘汰

種属の変形をもたらす進化の過程に於いて、生存競争と言う事が、正確に役割を果すのは、如何なるものであろうか？ 前章に於いては、極く僅かな不利益でも、これが近隣集団の中に起れば、夫れ

等の諸群の中、一群か、又は数群が全滅してしまう様な場合がある事を行ったのであった。更にこれらの不利益と言うものは、その性質が多様性に变化するもので、結局は、常に死亡率を増加させるに到るものである事も既に知ったのである。故に、この事から、既存種属の動物に関する限り、この中で最も適応力の小さな群が、如何にして、消滅して行くかと言う機構に就いては、明白であるが、これら種属の中に、繁殖した雑種と言うものと、これに関係ある、諸多の群に就いてのその適応能力は如何なるものであろうか？ Gauseの実例は、parameciumと、之を食するDidinium nasutum(全毛類)との二つの異った種より成る集団に関するものであった。即ち、食餌が十分である間は、この小さな環境では、万事都合が宜いのであるが、parameciumが欠乏するにつれて、捕食群の中、巨大形のもの、急速に死滅して行き、矮小形ものは暫時、生残し得たのであった。さて、これらの矮小形の生残群が、再び食餌を見出した時はどうなるであろうか？ Didiniumの集団が回復せられる事は勿論である。即ち、我々には未知な事ではあるが、恐らく結合した染色体の行動と関連する、或る機構に依って、巨大形の突然変異が起り、これが増殖して行くのであろう。そして、この矮小形と接合して、其後に雑種を生じ、Mendelの法則は、これらの雑種や、純粋種や、又は夫等の混合子孫の形を決定して行くものと考えられるのである。以下述べようとするものは、突然変異の出現機構に関するものではなく、最初の所在に於いて、一雑種と二純粋種とに就いてである。これらの群は夫れ夫れ、自身の生活係数を有し、一同質単一種属では数理論方程式は次式で示され、

$$p' = n p - m p - v p^2 - \mu p^2 \dots\dots\dots(1)$$

これは、種属の数的増加を与えるものであった。死亡率 m 、及び μ は特別な取扱いを必要としないもので、各群はそれ自身の係数を持っている。繁殖係数 n 及び v は異った交叉に於いて、三群中に含まれている一対の雌雄によって変動する。最も単純な場合に於いては、該種属の両性をとれば、交叉に9つの型があって、各型は特殊な繁殖率を持ったものである。 p_1 及び p_2 を二純粋種属の数とし、 p_3 を雑種の数としよう。もしこれら三群の各個体間の交雑が何等かの特殊法則によって統制されないとす

れば、 p_i 、 p_k 群間の交叉より結果する出生数は、極限要因が介入する事なく $\frac{n_{ik} p_i p_k}{p}$ に等しい。

但し $p = p_1 + p_2 + p_3 \dots\dots\dots(2)$

これらの要因が雌へ作用する事は、繁殖率 n_{ik} を減少させるために $\sigma_k = v_{1k} p_1 + v_{2k} p_2 + v_{3k} p_3$ になるとし、雄に関する類似の作用は次の効果を与えるものとする。

$$\tau_i = \rho_{i1} p_1 + \rho_{i2} p_2 + \rho_{i3} p_3$$

これらの条件に於いて、繁殖の訂正係数は次の如くである。

$$N_{ik} = n_{ik} - \sigma_k - \tau_i \dots\dots\dots(3)$$

更にこれらの交叉の結果はMendelの法則にしたがって分布される。我々は終に本問題の微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} p'_1 &= \frac{N_{11} p_1^2}{p} + \frac{(N_{13} + N_{31}) p_1 p_3}{2 p} + \frac{N_{33} p_3^2}{4 p} - m_1 p_1 \\ &\quad - p_1 (\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2 + \mu_{13} p_3) \\ p'_2 &= \frac{N_{22} p_2^2}{p} + \frac{(N_{23} + N_{32}) p_2 p_3}{2 p} + \frac{N_{33} p_3^2}{4 p} - m_2 p_2 \\ &\quad - p_2 (\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2 + \mu_{23} p_3) \\ p'_3 &= \frac{(N_{12} + N_{21}) p_1 p_2}{p} + \frac{(N_{13} + N_{31}) p_1 p_3}{2 p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$+ \frac{(N_{23} + N_{32}) p_2 p_3}{2p} + \frac{N_{33} p_3^2}{2p} - m_3 p_3$$

$$- p_3 (\mu_{31} p_1 + \mu_{32} p_2 + \mu_{33} p_3)$$

繁殖して行く雑種を与える二種属に関する場合は、本形に於いて淘汰の問題が起こる。もし同一の場所に他種属も生活していれば、(4)系は新しい項目及び式によって完成されなければならない。(4)式を考察すれば次の如くである。

- (1) 雑種に不利な条件の下では、更に多数の純粋種が生残する筈である。故に数的制限の必然的の結果、新突然変異が起っても、その生残機会は極めて小さい。
- (2) 雑種に基だ有利な条件の下では、三群の共存が可能で、安定平衡へ向う。
- (3) 二純粋種の間雑種の位置が介在する場合では、単により有利な生活係数を有する純粋群のみが生残する。

我々は進んで若干の比較的単純な特別の場合に於いてこれらの結論を眺めて見よう。

— 特殊例 1 —

係数 v_{ik} 及び ρ_{ik} は 0 で、三群間の単なる差異は異った死亡率より成るものとすれば、(4)式は単純化されて次の如くなる。

$$p_1' = \frac{n \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right)^2}{p} - m_1 p_1 - h p_1 p$$

$$p_2' = \frac{n \left(p_2 + \frac{p_3}{2} \right)^2}{p} - m_2 p_2 - h p_2 p$$

$$p_3' = \frac{2n \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right) \left(p_2 + \frac{p_3}{2} \right)}{p} - m_3 p_3 - h p_3 p$$

死亡率より少い、低い出生率の場合では、

$$n < m_1 \quad n < m_2 \quad n < m_3 \quad \dots \dots \dots (6)$$

で、凡て三群は 0 に向う。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

もし第一純粋種の死亡率が低ければ、

$$n > m_1 \quad m_3 > m_1 \quad \dots \dots \dots (8)$$

で、雑種及び第二純粋種は消滅して次式を得る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{n - m_1}{h}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

もし又第二純粋種の死亡率が低ければ、

$$n > m_2 \quad m_3 > m_2 \quad \dots \dots \dots (10)$$

で雑種及び第一純粋種は消滅する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{n - m_2}{h} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

以上は、純粋種の生残群の、その増加係数が正であって、その死亡率は雑種より低いものである事

を意味している。次に不等式(8)及び(10)が二つ乍ら、共に実現されたとすればどうであろうか？ この場合は、既述した様に、万事は $p_1(0)$ 、 $p_2(0)$ 及び $p_3(0)$ の原始値に依存する事になり、より少い少数の純粋種は、凡て雑種と共に消滅する。結局、雑種に基だ有利な環境では、

$$m_3 < m_1 \quad m_3 < m_2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

であって、三群の共存が可能なのである。

m_3 の値が m_1 と m_2 との間にある時は、生残する群は死亡率の最も低い、増加係数が正である純粋種となる。

— 特殊例 2 —

係数 $v_{i,k}$ 及び $\rho_{i,k}$ が 0 で、死亡率及び極限要因は全群に対し、同一で、繁殖率は、交叉によって変動すると言う別の場合を取って見よう。概念を固定させるため、次の如く式を置く。

$$n_{11} = n_1 \quad n_{22} = n_2 \quad n_{ik} = \frac{n_{ii} + n_{kk}}{2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

即ち、雑種の繁殖率は、純粋種のこれらの値の間にある。かくて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} n_{33} = n_{12} = n_{21} &= \frac{n_1 + n_2}{2} \\ n_{13} = n_{31} &= \frac{3n_1 + n_2}{4} \\ n_{23} = n_{32} &= \frac{3n_2 + n_1}{4} \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

この時(4)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \frac{p_1 p_1^2}{p} + \frac{(3p_1 + n_2) p_1 p_2}{4p} + \frac{(n_1 + n_2) p_3^2}{8p} \\ &\quad - m p_1 - h p_1 p \\ p_2' &= \frac{n_2 p_2^2}{p} + \frac{(3n_2 + n_1) p_2 p_3}{4p} + \frac{(n_1 + n_2) p_3^2}{8p} \\ &\quad - m p_2 - h p_2 p \\ p_3' &= \frac{(3n_1 + n_2) p_1 p_3}{4p} + \frac{(3n_2 + n_1) p_2 p_3}{4p} \\ &\quad + \frac{(n_1 + n_2) p_1 p_2}{p} + \frac{(n_1 + n_2) p_3^2}{4p} \\ &\quad - m p_3 - h p_3 p \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

この平衡三状態は、この場合では互いに他と一致しない。

第一の場合では、繁殖率低く、

$$n_1 < m \quad n_2 < m \quad \dots\dots\dots (16)$$

凡ての群は消滅する。

第二の場合は、第一純粋種の増加係数は正であって、その繁殖率は第二純粋種より大である。

$$n_1 > m \quad n_1 > n_2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

これは極限に於いて、第一純粋種を生残に導くものである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = \frac{n_1 - m}{h}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

第三の場合は第二の場合の反対である。

$$\left. \begin{aligned} n_2 > m \quad n_2 > n_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2 = \frac{n_2 - m}{h}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

かくて、この場合、最も繁殖率の高い種属だけが、その増加係数が正であれば、生残する。

— 特殊例 3 —

繁殖率及び死亡率は凡ての群及び凡ての交叉に対して同一なものとし、極限係数は次式を満足するものとする。

$$\rho_{ik} = v_{ik} = 0, \quad \mu_{ik} = \mu_1, \quad \mu_{2k} = \mu_2, \quad \mu_{3k} = \mu_3$$

依って、(4)式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \frac{n \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right)^2}{p} - m \mu_1 - \mu_1 p_1 p \\ p_2' &= \frac{n \left(p_2 + \frac{p_3}{2} \right)^2}{p} - m p_2 - \mu_2 p_2 p \\ p_3' &= \frac{2 n \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right) \left(p_2 + \frac{p_3}{2} \right)}{p} - m p_3 - \mu_3 p_3 p \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

凡ての事柄は雑種群の極限係数 μ_3 に依存するもので $n - m > 0$ 及び μ_3 は $\mu_1 \mu_2$ の中間にあるものとすれば、この場合、最も抵抗力のある純粋種は生残し、これは最小の極限係数を有することになる。又、 $\mu_3 > \mu_2$, $\mu_3 > \mu_1$, $n - m > 0$, とすれば、数の少い群は極めて早く消滅する。これは雑種の場合である。最後に雑種に基だ有利な環境では、 $\mu_3 < \mu_1$, $\mu_3 < \mu_2$, $n - m > 0$, で三群の共存が可能である。

かくて本議論の最終結果は、我々の結論と一致する。

3. 間接淘汰

種属 p は二純粋種 p_1 , p_2 より構成され、夫等の雑種 p_3 は、これに有利な条件の位置を占めるものとする。

平衡は実現されて、この小世界に於いては、平衡を覆す別の種属 x が出現するまでは存続する。これより招来する、数学的生物学的問題は余りにも複雑であって、本節の一般項目に於いては究めることは出来ない。そこで特別な場合の研究に止める。即ち新種属 x は、種属 p に対する食料として、役立つものとするれば、本系統或は次の形式を持つ。

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \frac{n \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right)^2}{p} - m p_1 - h p_1 p + l_1 p_1 x \\ p_2' &= \frac{n \left(p_2 + \frac{p_3}{2} \right)^2}{p} - m p_2 - h p_2 p + l_2 p_2 x \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

$$p'_3 = \frac{2n(p_1 + \frac{p_3}{2})(p_2 + \frac{p_3}{2})}{p} - Mp_3 - hp_3p + l_3p_3x$$

$$x^1 = Ex - Hx^2 - x(l_1p_1 + l_2p_2 + l_3p_3)$$

又, $M \ll m$, 及び, $\epsilon = n - m > 0$ (22)

先づ繁殖率 n は可成り大であって, 食料の活用係数は次の不等式を満足するものとする。

$$l_1 > l_3 \quad hE > \epsilon \lambda l_1$$

これらの条件は第一純粋種に有利であって, 第二純粋種及び雑種は終局に於いて消滅に終るものである。

第一純粋種は食料種属との平衡状態に於いて生残する。

$$\lim p_1 = \frac{El_1 + \epsilon H}{\lambda l_1^2 + Hh}$$

$$\lim p_2 = 0 \quad \lim p_3 = 0$$

$$\lim x = \frac{hE - \epsilon \lambda l_1}{\lambda l_1^2 + Hh}$$

もし第二純粋種が有利であるとすれば,

$$l_2 > l_3 \quad hE > \epsilon \lambda l_2$$

この時は次の如くなる。

$$\lim p_1 = 0$$

$$\lim p_2 = \frac{El_2 + \epsilon H}{\lambda l_2^2 + Hh}$$

$$\lim p_3 = 0$$

$$\lim x = \frac{hE - \epsilon \lambda l_2}{\lambda l_2^2 + Hh}$$

増加が不十分である場合には,

$$\epsilon < -\frac{l_k E}{H} \quad (k = 1, 2, 3) \dots\dots\dots(25)$$

捕食種属は消滅する。

$$\lim p_1 = \lim p_2 = \lim p_3 = 0 \quad \lim x = \frac{E}{H} \dots\dots\dots(26)$$

結局, もし l_3 が十分大で, ϵ が正であれば, 三捕食群及び夫等の餌食群の共存は可能である。かくて, 本系統の究極運命は主として, 雑種群に依存し, 特に食餌の活用係数 l_3 に依存する。もし l_3 の値が l_1 と l_2 との中間にあるとすれば, 生残群は, その食料を最大に活用する純粋種属であろう。もし雑種が純粋種属の何れよりも, この食料を活用する事が効果的でない場合は, その結果は捕食種属の初期の構成に依存し, もし雑種が食料をよりよく活用すれば三群及び夫等の餌食群との共存は可能である。不等式に示された補助的条件は, 凡ゆる場合に於いてこれらの結論を示している。もし ϵ が負であれば即ち種属 x なるものが殆ど種属 p の唯一の食餌を構成する時は, 但し不等式(25)は満足されないが, 凡てこれらの現象はどうやら存続する。故に淘汰作用の実現に関しては, 何等疑いの余地がない。雑種を生じない二群が密接に提携していると言う場合に於いては, それ程有利でない方の種属が消滅する確率は二群の共存確率より大きい。又雑種を生ずる二種属の場合に於いては, これら種属の究極

運命は雑種の生活係数に依存するものである。もし雑種が純粋種よりも、有利でない場合でも、数のより少ない純粋種は消滅するかも知れない。そして本事実には、繊弱な雑種を生ずる、凡ての突然変異の運命を決定するものである。反対の環境の下では、三群の共存は可能であって、中間の場合に於いては、更に有利なる純粋種属のみが生残する。これは雑種の性質と言うものが凡て純粋種中の一群の性質によって、支配されるか、又は二純粋種属の性質の間に介在した場合に起る。

“……より都合よき……”及び“……より都合悪き……”と言う言葉は甚だ漠然としている。我々は生活係数と関係している不等式によって、夫等を置換して、主なる三群の諸要因に関する研究を別個に行おうと努めたのである。そして得られた結論は、現実に観察した結果と完全な一致を見出したのである。しかし、未だ二つの点が、不明瞭のままに残されている。即ち突然変異の出現の原因と、一種属の有する変異の数である。此の二つの問題は、互いに独立したものではない。あらゆる問題は、染色体中にある、遺伝因子の初期及び終期の分布状態に、依存しているように思われる。物理的、及び化学的的要因は、この過程において、作用するもので、臨界環境では、更に問題になる事は、外的条件の突然の変化は、異常分布をひき起こすものかどうかということ、又その中で若干のものには有利であっても、永続的のものかどうかと言った事である。更に又、安定的な遺伝因子の配列数は相当な数に上るものと思われるが、その表現型は殆んど連続変異を示すとも考えられる。しかし染色体中のこの細部の機構までは手が届かない。故に重要な事は、二つの独立機構、即ち淘汰及び突然変異の出現のような作用によっては、一種属中に、殆んど無制限の変異が起り得るということである。

— 以 上 —

附 錄

◎ 和，英，仏，用語対照表

第 一 章

図 式	figure	nombre
極 微 分 析	infinitesimal analysis	l'analyse infinitésimale
初 期 資 料	initial data	données initiales
生 物 方 程 式	biological equation	équation biologique
移 入 民 数	immigrants	individus ont immigré
移 出 民 数	emigrants	individus ont émigré
線 状 形 式	linear form	forme linéaire
増 加 係 数	co-efficient of increase	coefficient de multiplication
極 限 係 数	limiting co-efficient	coefficient limitatif
固 有 出 生 率	intrinsic co-efficient of fertility	coefficient intrinseque de natalité
極 限 出 生 率	limiting co-efficient of fertility	coefficient limitatif de natalité
固 有 死 亡 率	intrinsic co-efficient of mortality	coefficient intrinseque de mortalité
補 正 死 亡 率	complementary co-efficient of mortality	coefficient complémentaire de mortalité
生 活 係 数 } 又は人口動態係数	vital co-efficient	coefficient vitaux
生 物 統 計 学	biometry	biometrie
単一又は孤立人口	isolated population	une population fermée
人 口 民 勢 統 計	demography	demographie

第 二 章

頻 数 曲 線	frequency curve	courbes de fréquence
媒 介 変 数	parameter	paramètre
同 種 二 形 態	dimorphism	dimorphisme
捕 食 敵 者	predatory foes	prédateurs
同種又は同質集団	homogeneous population	population homogène
図 形 又 は 図 線	scheme	modèle
偏 異 分 布	distribution of deviation	distribution de déviation

微分方程式	differential equation	equation différentielle
分散度	dispersion	dispersion
活利用率	co-efficient of utilization	coefficient d'utilisation
数列	series of numbers	suites numériques
無視的極微小	negligible small	négliger
生物学的变数	biological variables	variables biologiques
函数	function	function
变域	interval	intervalle
相关	correlation	corrélation
周期函数	periodic function	fonctions périodiques
餌食種	species preged	proies
指数法則	exponential law	loi exponentielle
周期態的振動	periodomorphic oscillation	oscillations périodomorphes
擬周期的振動	pseudo-periodic oscillation	oscillations pseudo-périodique
準周期的振動	quasi-periodic oscillation	oscillations quasi-périodique
多項式	polynomial	polynome
代数方程式	algebraic equation	equations-algébriques
固定狀態	stationary state	état stationnaire
平衡狀態	state of equilibrium	état d'équilibre
安定性	stability	stabilité
特性式	characteristic equation	equation caractéristique
一般式	secular equation	equation séculaire
變動式	flnctuation	flnctuation
螺旋形曲線	spiroidal curve	courbe spiraloide
閉括線	cycle	cycle
結節点	node	naeud
焦点	focus	foyer
微分生物方程式	biological differential equation	equations différentielles biologiques

第三章

恒常度	degree of constancy	certainne stabilité
噸	metric ton	tonne

第 四 章

数 理 論 法 則	logistic law	loi logistique
数 理 論 式	logistic equation	equation logistique
極 限 要 因	limiting factor	facteur limitatif
誘 導 抵 抗	reactant	reaction
彎 曲 點	point of inflexion	point d'inflexion
加 速 增 加	accelerating growth	croissance accélérée
遲 滯 增 加	diminishing growth	croissance ralentie
飽 和 狀 態	state of saturation	état de saturation
加 增 富 源	additional wealth	richesse supplémentaire
人 口 曲 線	population curve	courbe de population
環 帶	band	bande
代 謝 產 物	metabolic products	produits métaboliques

第 五 章

變 動 要 因	variéd factor	facteur variés
導 函 數	derivative	dérivée
微 積 分 方 程 式	integro-differential equation	equation intégrodifférentielle
麻 醉 係 數	co-efficient of intoxication	coefficient d'intoxication
殘 存 作 用	residual action	action résiduelle

第 七 章

完 全 變 態	complete metamorphosis	métamorphoses completes
修 正 數 理 論 法 則	modified logistic law	loi logistique modifiée
共 存 變 相	co-existent phases	coexistence des phases
變 態 係 數	co-efficient of metamorphosis	coefficient de transformation
減 少 要 因	diminishing factor	facteur décroissant
老 衰 式	equation of senescence	equation à vieillissement
動 態 公 理	dynamic theory	théorie dynamique
外 的 勢 力	external forces	forces extérieures
內 的 勢 力	internal forces	forces intérieures
慣 性 力	inertia	inertie
媒 體	medium	milieu

第 八 章

間 歇 要 因	intermittent factor	facteur intermittents
突 然 變 異	mutation	mutation
動 態 的 平 衡	dynamic equilibrium	équilibre mobile
寄 生 作 用	parasitism	parasitisme
共 棲 作 用	symbiosis	symbiose
相 反 極 限 作 用	reciprocal limiting action	action limitative reciproque
內 的 爭 鬪 係 數	co-efficient of internal competition	coefficient d'autoconcurr- ence

第 九 章

平 衡 確 率	probability of equilibrium	probabilité de l'équilibre
消 滅 確 率	probability of disappear- ance	probabilité de la dispar- ition
生 物 學 的 法 則	biological law	loi biologiques
平 均 保 存 の 法 則	law of conservation of averages	loi de la conservation des moyennes
週 期 的 循 環 の 法 則	law of the periodic cycle	loi du cycle periodique
平 均 攪 亂 の 法 則	law of disturbance of average	loi de la perturbation des moyennes
弛 緩 週 期	periodicity of relaxation	periodicité relaxation
減 衰 振 動	decreasing oscillation	oscillations amorties
無 限 系 列	infinite series	succession infinie
減 少 極 限	diminished limit	limite diminuée

第 十 章

寄 生 的 去 勢	parasitic castration	castration parasitaire
感 染 係 數	contamination co-effici- ent	coefficient de contamina- tion
經 驗 函 數	empirical function	fonction empirique

第 十 一 章

基 礎 消 費	basal expendituse	dépense de fond
---------	-------------------	-----------------

機能消費	functional expenditure	dépense de fonctionnement
構成消費	constructive expenditure	dépense constructive
双曲正切函数	hyperbolic tangent	tangente hyperbolique
培養面積	area of the culture	surface de la culture

第十二章

特殊点	peculiar point	point singuliers
臨界時期	critical time	moment critique
基礎代謝	basal metabolism	métabolisme de base
除去作用	elimination	elimination

第十三章

成長法則	growth law	loi de croissance
对数坐標	logarithmic co-ordinate	coordonnées logarithmiques
屈折線	broken line	ligne brisée
皺疊	foldings	plissements
翻轉	evagination	evagination
疊嵌	invagination	invagination
不調和の法則	laws of disharmony	lois de dysharmonie

第十四章

相称性	symmetry	symétrie
極性	polarity	polarité
流体静力学的压力	hydrostatic pressure	pression hydrostatique
滲透压	osmotic pressure	pression osmotique
毛细管引力	capillary attraction	tension capillaire
粘性	viscosity	viscosité
放射相称	radial symmetry	symétrie centrale
假足体	pseudopodia	pseudopode
自動機構	automatic mechanism	mecanisme automatique
解放動因の作用	action of a releasing agent	action d'un declancheur
輻合現象	phenomenon of convergence	phénomène de convergence
流体动力学	hydrodynamics	hydrodynamique
懸帶	suspensor	sustentateur

第 十 五 章

エントロピー
(熱力学的機能)
間 接 淘 汰

entropy

indirect selection

entropie

sélection indirecte

