人口問題研究所
研究資料第三十三號
昭和二十三年七月

人口統計における幾何學的表現法について

厚生省人口問題研究所

はしがき

文明國では今日の如き人口の靜態統計は既に十八世紀に與へられていたが、動態統計の整備されたのは約一世紀後れて十九世紀に入つてからで、例えば、獨乙では一八一一年以來、墺多利では一八五七年以降のことである。この動態統計資料の整備は人口統計一般についてその理論的及實際的發展に貢献したことはいう迄もないが、ここの幾何學的表現法に對しても大きい寄与があつた。否寧ろ後段の文献からも看取される如く、これによつてその理論的發展と實際的應用が始めて可能になつたものといえよう。

今 Lexis によりこの研究の重要なものを擧げて、みると大凡次の如くである。

先づ、一八六七年、Meyer の研究があり（Hildebrands Jahrbüchern Bd VIII）更に、Becker は Statistische Mittheilungen über das Grossherzogtum Oldenburg IX 1867 により Knapp は Die Ermittlung der Sterblichkeit etc. 1868. により Zeuner は Abhandlungen aus der mathematischen Statistik 1869.

により、Brasche は Beitrag zur Methode der Sterblichkeitberechnung. 1870. により、Lexis は Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. 1875. により夫々研究が公表された。(Theorie der Bevölkerung and Moralstatistik. 1903. 5. 3)。

ところで、これを統計学の発展との関聯においてみると、十九世紀初期にケトレー出現により統計学は科学の女王となったが、次の時期には科学の下僕と迄貶下された。この期に統計学は内省と着実化の方向を辿ったのであるが、ここの幾何学的表現法は斯かる統計学の内省、着実化から生れた一つの成果と考えられよう。

以下幾何学的表現法についてその概略を紹介するが、なお暫定稿たるに過ぎないものである。

第一　その技術的側面

人口現象の観察単位は絶えず変化し運動しているが、しかも之の変化、運動の無限の連絡と考えられる。これを時間的契機から如何に限定するかは人口統計学上一つの問題である。

いま、その単位の存続性からみて、その存続期間の比較的長い線集団と比較的短い瞬間的な点集団とに区別出来る。而して、この際その単位のもつ時間的性質とその観察方法の性質とは全く反対の性格をもっている。即ち、線集団の単位は存続期間が長いので同時に多数並存し得るから一時点で把握するに適するに対し、点集団、の単位は瞬間的存在であるから一時点で同時に多数存在し得ないから一時点での把握に適せず、一定の期間における把握に適する。よって、前者は一時点で、後者は一定期間で捕捉する。前者の例はセンサスによる静態統計で、後者の例は出生、死亡、等の動態統計である。

所で、人口統計における線集団（例、人口）と点集団（例、死亡）の間には、後者

は前者から発生しているという関係がある。而してこの関係を生命現象の要素を介して観察する場合、それは可なり複雑なものであるから、何より簡明な表現を必要とする。幾何学的表現法は、その性質上特に右の簡明な表現に有用である。ここではこれを特に従来研究された死亡率の測定について解説することゝする。

(註) 線集団と点集団との区別は W. Winkler によるもので、後段のべる如き Lexis' Becker の平面への表現法に由来するものである。即ち、存続期間の長い単位を平行に並ぶ線と考へ、瞬間的な単位を前後左右に並ぶ点と考へる所から附せられた名称である。(W. Winkler [illegible] (1933))

一、[illegible]の表現法、附、Lexis の表現法

一般に生命現象は、生物学的に、出生時点(一)、年令(九)及観察時点(一て)の三者によって把握される。そしてこの三者の間に

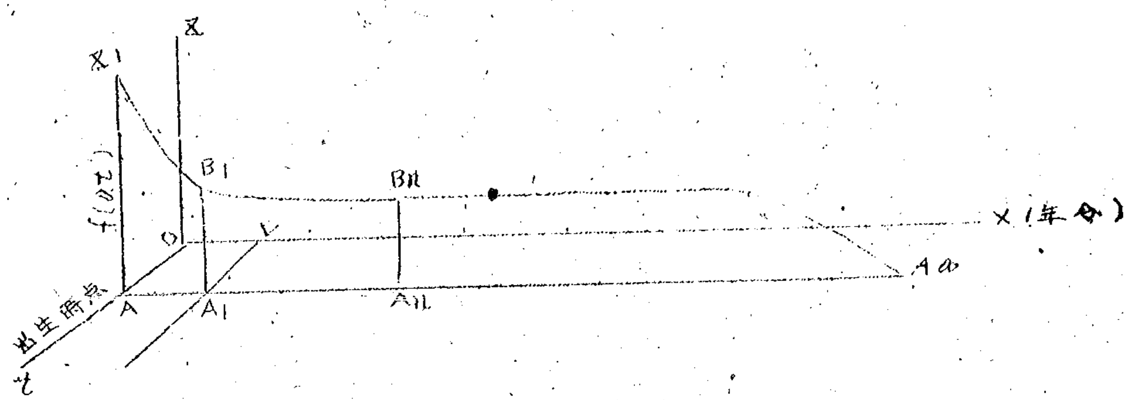
$\tau = x + t$（例、昭和20年＝10才＋昭和10年）

の関係があるから、何れかの二変数が定まれば、他の一つは之れに従って定まるという関係にある。今、斯の様な関係にある生命現象を幾何学的に如何に表現するかが問題である。

Zeuner は生存者を右の関係に基いて年令と出生時点を独立変数と考へて三次元に表現した。即ち、空間直座標系の上に Ox、Ot、Oy をとると、生存者数（y）は年令（x）と出生時点（t）の函数、$y = f(x, t)$ で表はされる。（第一図参照）。ここで出生時点が異れば出生数も異るのであるが、$t + x = \tau$ においては同一であると考へられる。つまり、瞬間的な時点の出生者は完全な一世代と考へられる。

今、この理想的な一世代の生残関係をみるに、$y_0 = f(0, t_0)$ を t_0 時点における出生数（完全な世代）とすると、これは x_1 年後には、$y_1 = f(x_1, t_0)$ となり、最後にはこの世代の者が一人残らず死亡するに至る（$y_\omega = 0$）。（第一図参照）。これは理想生残律を表象するものである。

Fig. 1.



六

次に、この様な線を無限に多く集めると一つの平面を形成する。Zenner はこれを生存者面 *Lebensfläche* と名付けた。この中に一定の時点に生れ、一定の年令に達した迄ての生存者が含まれているわけである。(第二図参照)。この生存者面を利用して以下のべる如き各集団を限定せんとするのが Zenner の表現法である。

生存者の集団

いま、時点t_1からt_2の間に出生せる者の生存面を作り、OX軸上のx才の所でこれをXOt面平行に截断すると$A_1B_1D_1C_1$をする。

これはt_1t_2の間に生れたx才の同令者の截

断面である。これを

第一種生存者の集団乃至同令生存者の集団といい、$[E_{ix} = A_iB_iD_iC_i]$ で表はす。第二図参照。

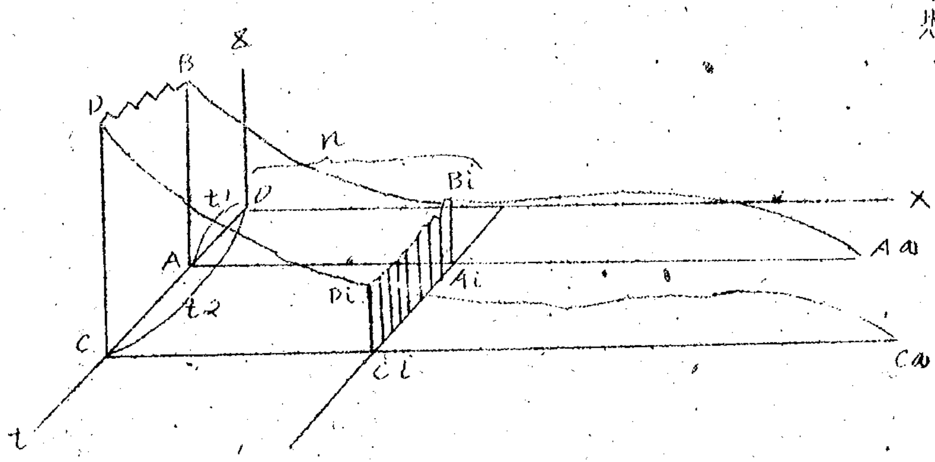
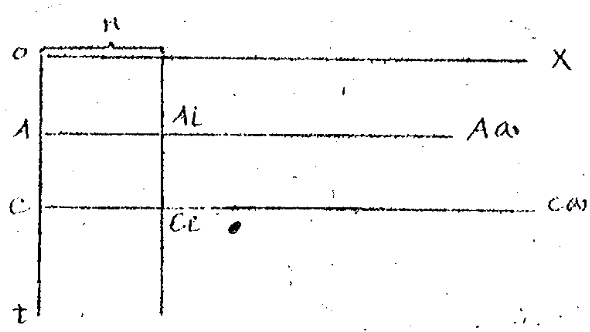


Fig. 2.

なお、Lexisの表現方法はこの $A_iB_iD_iC_i$ を平面 Sot に投影したもので第三図の如くになる。

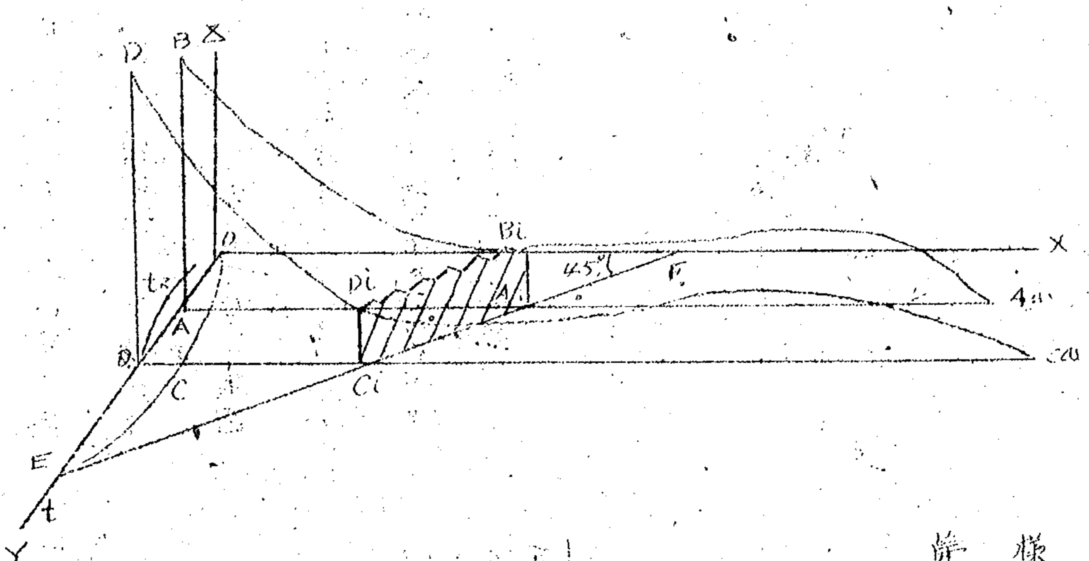
Fig. 3.



次に、第二図において観察時点（T）を一定として右図様に截断面を作ると第二種乃至同時生存者の集団をうるが、前記の如くT=t+xなる関係があるとこれはX軸に45°の直線の方程式を表はすものであるから、この截断線はX軸と45°の角度をもつことになる。

これを$\square = A_iB_iD_iC_i$で表はす。次の第四図参照。

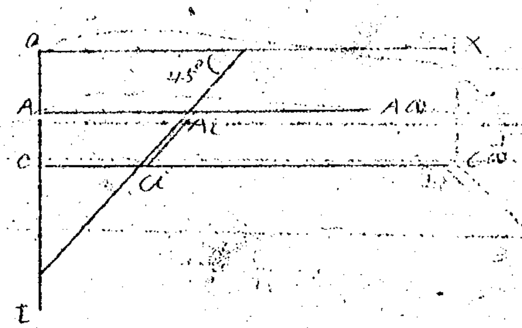
Fig. 4.



又、レキシスの方法はこれを前段同様に平面XOt上に投影したものである。

第五図。

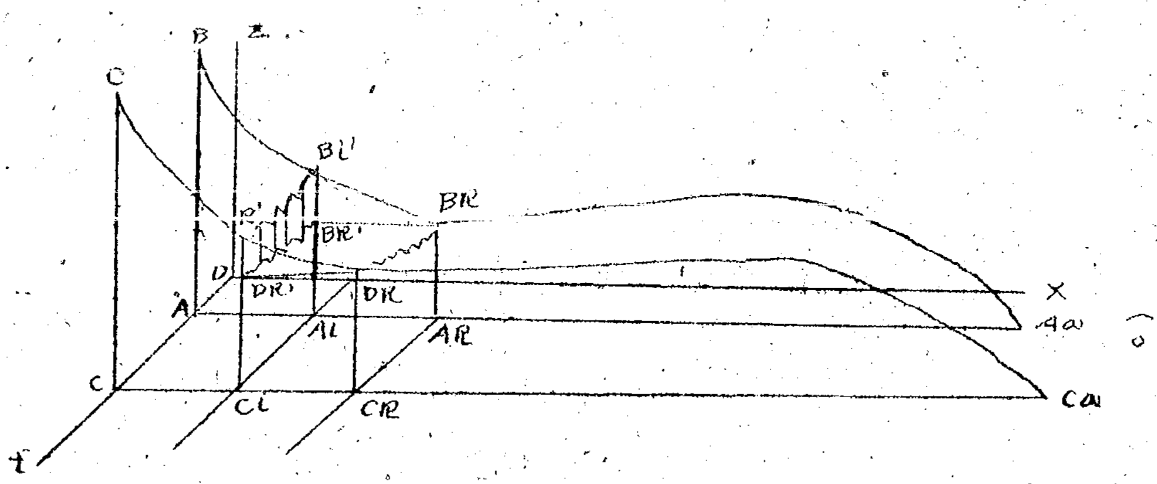
Fig. 5.



死亡者の集団

上記の n_i 才の同令生存者の集団 ($A_iB_iD_iC_i$) は数年後に n_R 才に達すると、より小さい同令生存者の集団 $A_RB_RD_RC_R$ となる。これから第一種の死亡者の集団乃至同令死亡者の集団が得られる。これを M^I で表はすと、M^I は図から明らかに $M^I = A_iB_iD_iC_i - A_RB_RD_RC_R = \Gamma^H_{ni} - \Gamma^H_{nR}$ である。第六-一図参照。

Fig 6-1



又、Lexis のものはこれを平面xtに投影したものである。　第七ノ一図

同様に、第二種の死亡者の集団を限定しうる。又 Lexis の表現法はこれを平面に投影して得られる。

図6ノ2及7ノ2参照。

Fig. 7-1

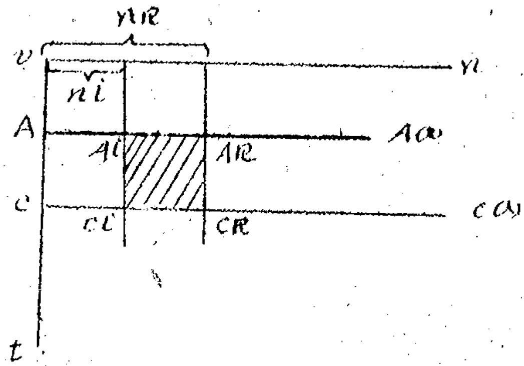


Fig 6-2

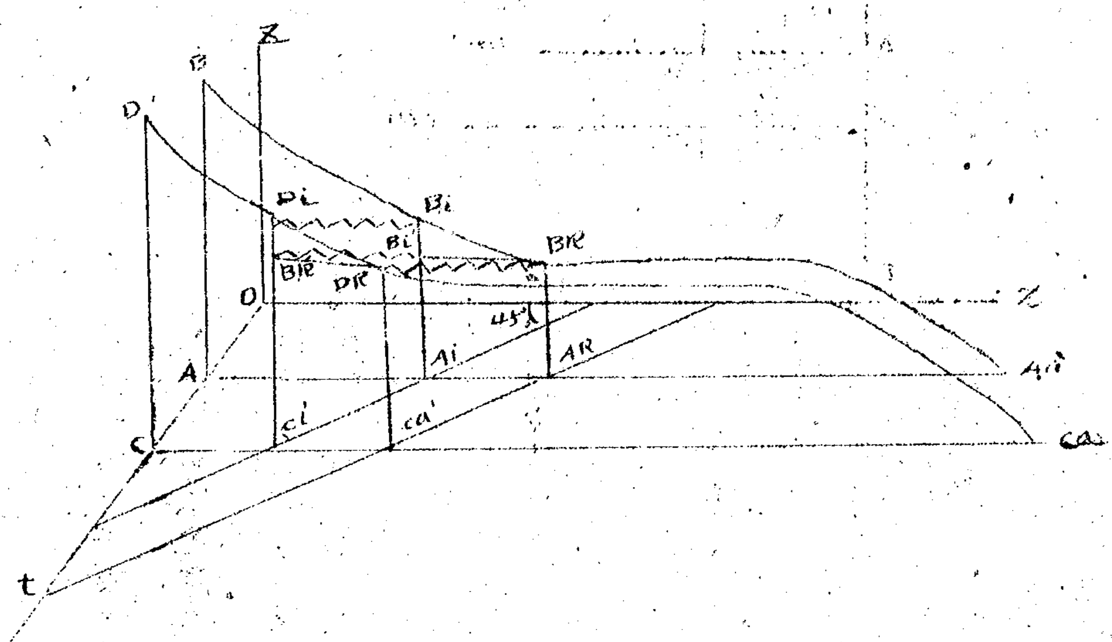
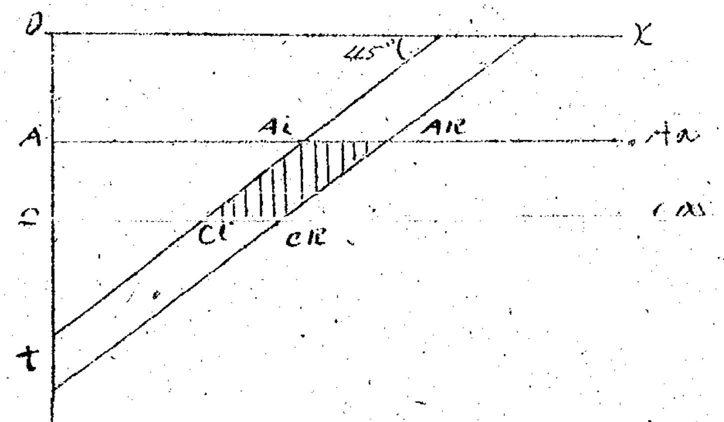

Z
B
D'
Bi
Bi
Bi
BR
BR
DR
O
45°
Ai
AR
A
Ai
ci
ca'
C
ca
t

Fig 7-2


O
X
45°
A
Ai
AR
Aa
C
Ci
CR
ca
t

二、 Becker の表現法

前記 Zeuner の三次元への表現法は、本表、三つの変数を含む生存者乃至死亡者の集団（例へば、図Ⅱ＋（九、十））の表現法として理論的に妥当なものであって、Lexis の如くこれを平面に投影するとその集団の量的推移関係が抽象されて設度量「Massellos」）となる。

然し乍ら、既述の如く人口現象の表現に重要不可欠な要素は、年令、出生時点及観察時点（実際上は以上の何れか二つ）であり、この三者の関係を図上に明確に表現することが幾何学的表現の目的から何より重要である。このためにはこの関係を空間によりも平面に表現する必要がある。この意味において平面上に表現するものがヨり優れているといへよう。而して、この際抽象された集団の量的推移関係は Zeuner の表現の如く本表空間に表現されているものである事を想起することにより補完して考えられる。

[illegible]において、この関係を平面上に表現する方法、特に x 軸及 y 軸に比較可能

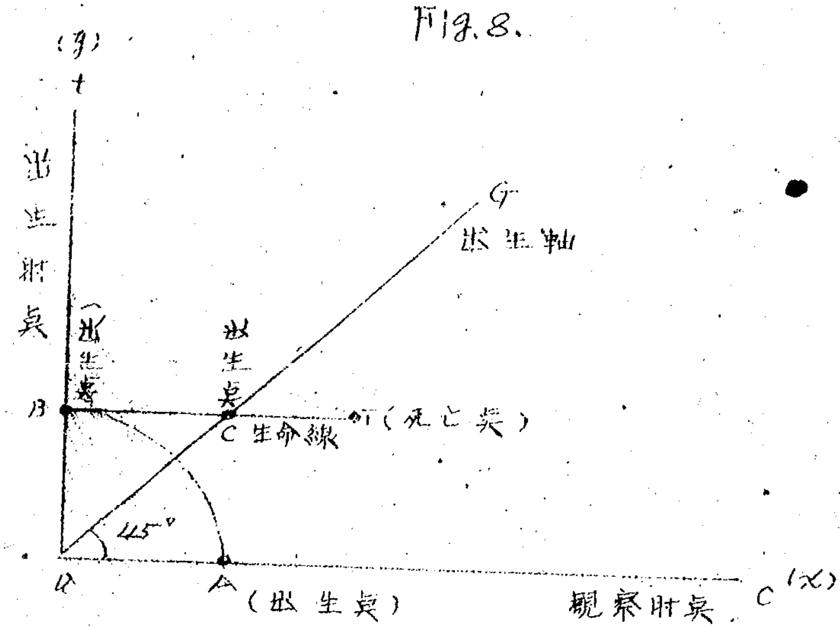
な観察時点と出生時点をとった Becker の方法は適切であるといえよう。

Becker の表現法は上記 Lexis の座標系を45°だけ回転せしめると得られるのであるが、Lexis は x 軸に年令、y 軸に出生時点をとっている点が Becker のものと相違している。

Becker は出生すると同時に観察するという建て前から、出生者は観察時線 Ox 上に点として表され(出生点)、以後生存すれば線として Ox 軸上に示され、死亡すると終る(死亡点)。この方法では一つの観察時線 Ox 上に凡ての生命線が重り合うので、Ox 軸から出生点を切り離し、これから90°だけ上方に移動せしめた Oy (y) 軸に移し、そして出生と共に観察すると、$x = y$ の関係にあるから、出生者は凡て角 xOy の二等分線(OG)上に示されることになる。このOGを出生軸と名付ける。又この出生軸(OG)零才の者が集められているから年令線の性質をも合せもったものである。これから Ox に平行に各生命線は示され死亡時点で終る。第八図参照。但し、既に上段のべた如くこの場合は前記 Lexis のものと異り実際の出生、死亡後生存者の量を表現するものでは

なく、この意味で没度量といえる。

Fig. 8.

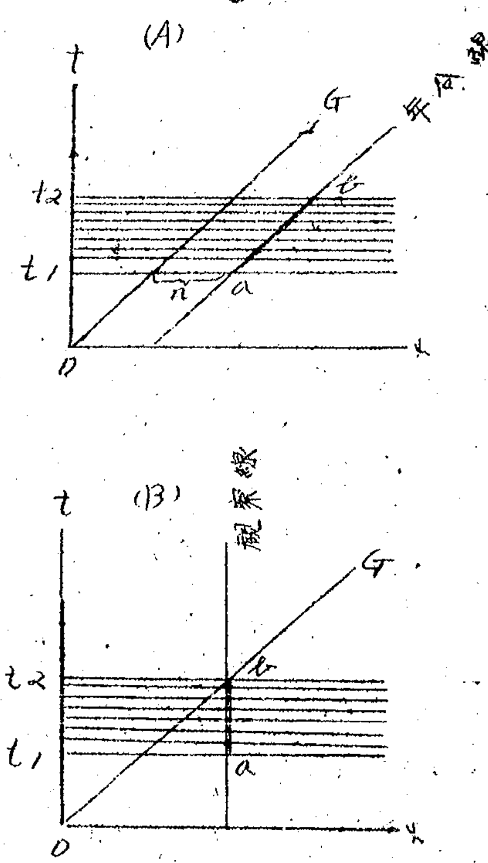


此処の問題はこの構図においてGOX平面上に生存者の集団と死亡者の集団とを如何にして限定するかということである。

先づ、右の関係から前図において生命線を切断する任意の線は一つの生存者の集団を表はすものであり、斯かる線は無限に多数在る訳であり、従って、無限に多数の生存者の集団が出来ることとなる。然し此処で今死亡確率を求むるに必要な集団のみを考えているのであるから、このために必要な生存者の集団は、先づ、OG、OX、Ot関係する線、即ち、これら

への平行線が作る集団である。更に、$0x$への平行線はその性質上生存者の集団を限定しくないから$0G$、$0t$への平行線のみが必要である。その概念は次図の如くであり、こ等を生存者の主要集団という。図から明らかなる如く、$0G$に平行な線abは第一種乃至同令生存者の（主要）集団、$0t$に平行な線abは第二種乃至同時生存者の（主要）集団である。

Fig 9



次に、死亡者の集団の限定を考へると、Jenner の如く線によつて限定すると線上の死亡点は過少であるから、一定の拡りをもつた平面によつて限定する必要がある。而してこの場合も前段同様無限に多くの死亡者の集団が形成されうるのであるが、亦前段同様の理由から、bd、bx、xt に対する平行線のみが使用される。更に右の三平行線により限定される集団も、一個の六角形、六個の五角形、一五個の四角形、二〇個の三角形が出来るのであるが、之等の内で此処で必要な集団は次の三個の平行四辺形のみである。これ等を死亡者の主要集団という。

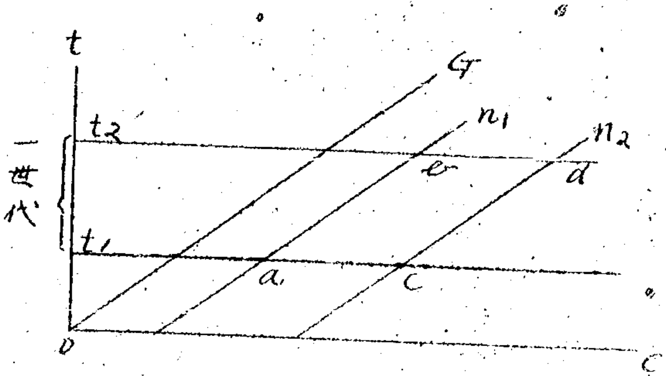
(一) 第一種の死亡者の集団 M^I

これは次図から明かにみられる如く第一種の生存者の集団から出るものである。而してこの両集団(生存者及死亡者)は相互に所属する同種の集団であるから死亡確率が計られる。即ち、第一種の生存者の集団から均等なチャンスで死亡者が第一種の死亡者の集団に生起するのである。これは $M^I =$ ▱bdtx

但し、この M^I は、図からも明かなる如く、出生の生起する期間及年

合の開きは共に一ヶ年間であるが、々之死亡の生起する期間の開きは二ヶ年間に亘っているのである。

Fig 10.



この平行四辺形 abdc の中で死亡せる者は ab から出たものであるが、最早 cd には属さないものである。之れを代数的に表現すれば、

$$abdc = ab - cd$$

或いは、

$$\Sigma_1 = L_{n_1} - L_{n_2}$$

であり、即ち、第一種の死亡者の集団は二個の前後の第一種の生存者の集団の差である。

而して、この ab cd abdc 等を点の集合と考へると、数字で計算する如くに記号で計算が出来、更又、解析的表現が出来る。即ち、

$$P_2 = \frac{abdc}{ab} = \frac{\Sigma_1}{L_{n_1}}$$

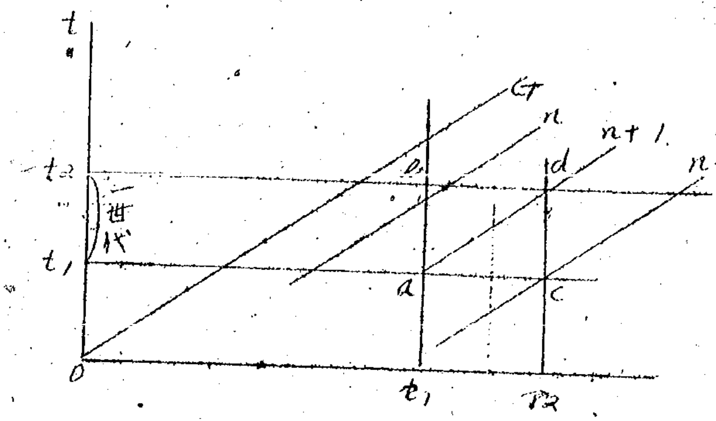
(二) 第二種の死亡者の集団 M^{II}

これは次図に示す如く第二種の生存者の集団から出る。

即ち、 $M^{II} = abdc$

である。但し、此処では図からも明かに看らる如く、出生の生ずる期間と死亡の生ずる期間は一ヶ年であるが、死亡者の年令は二才の間に亙っている。

Fig 11



而して前段同様に記号で表はせば

$abdc = ac - bd$

或いは、 $M^{II} = L^{II}_{n+1} - L^{II}_{n+2}$

であり、即ち、第二種の死亡者の集団は前後の第二種の生存者の集団の差である。

この場合も同種の集団（Gesamtheit）があるから（同時生存者の）死亡確率が得られる。

即ち、 $P^{II} = \dfrac{M^{II}}{L^{II}}$ を得る。

（三）第三種の死亡者の集団 M^{III}

先づ、その概念の解説に先立ち、上記のものも含めた各集団と動態統計資料の関係について一言する必要がある。

第一種の生存者とそれから生ずる第一種の死亡者とから計算せる第一種の死亡確率は死亡率の理想的尺度とみられるが、これは死亡年令が二ヶ年間に亘っている関係上一般に一ヶ年単位で作成されている動態統計からは直接データーが得られず、又生存者の集団も国勢調査から少くとも直接には求められない。又第二種の死亡確率の計算資料は、生存者の集団は国勢調査から得られるが、死亡者の集団は動態統計が出生年次別に分類表章されている場合（わが国では昭和十二年以降）に始めて得られる訳である。

第三種の死亡者の集団については、後段のべる如くこれと照合せしむべき生存者の集団を欠くものではあるが、これは動態統計が満年令別に分類されているだけで得られ、この分類は各国とも従来から行はれており、従って、資料が得られたわけである。

斯の事情からこの集団について従来特に研究が進められた。~~なお、データも各集団~~

~~その関係については附表によれば年令別人口の点から~~

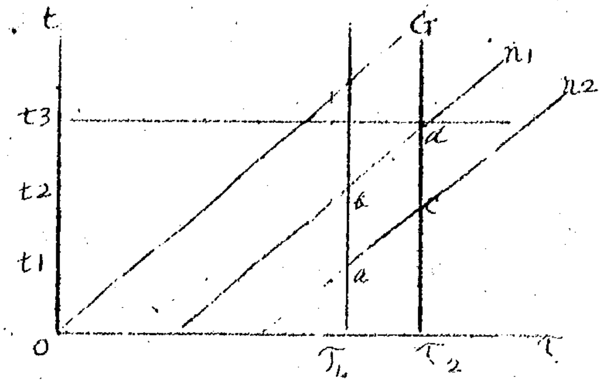
本様、この幾何学的表現法は、幾何学的表現法の機能を利用して、先づ理論的、理想的な型を抽象し、これから順次より実際的にデータの適用を考察するものといえようが、この際、純粋理想的なものを標準にしているのであるが、特に、この表現法の機能から技術的に直接両者（データと理想型）の関係の考察が可能であるところにこの表現法の意義があると考えられる。例えば Lexis の表現法から Lexis、Becker のそれに行くに従って理想型からより実際的な表現に接近し、又 Zeuner においては、先づ、最も完全な世代の生残律の表象から同令同時者の表現と順次実際化している。この意味で以上の第三種の死亡者の集団に示したが如く、第一種の死亡者の集団が、最も実際的な集団の表現に終ったものと考えられる。而かも、後みる如く、同令生存者及死亡者の各間との関係がこの表現法により直接相隣接する平行四辺形線分によって観察されるところに、この第三種の集団の重要性があると考えられる。更にこれは後段のべる如く経験的概念としての統計的度量数の本質とも関聯し

て評價さるべきものであらう。

次に、この集団の構成をみると圧の如くである。

この集団は、次図の示さ如く死亡の生ずる期間と年令の開きは一ケ年及び一才であるが、他方、出生の生ずる期間（世代数）は二ケ年（二世代）に亘つている。從つて、この集団においては、これと対比すべき同種の生存者の集団がないから、確率は求められず、その近似値が求められるに過ぎない。

Fig. 12.



更に、右の図から明らかなる如く、$\ell b d c$ 内の死亡点は三角形 $\ell b c$ 及び $b c \ell$ 内の死亡点の和である。これを代数的に表現すれば、

$$\ell b d c = (\ell b d - c d) + (a b - a c) = \{b d - a c\} + (a b - c d)$$

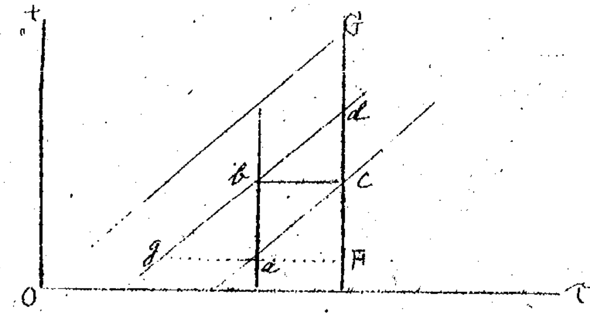
或いは、$\Sigma^{B} = (\Gamma_{21} - \Gamma_{22}) + (\Gamma_{31} - \Gamma_{T2})$

であつて、つまり、第三種の死亡者の集団に前後の第一種の生存者の集団の差に前後の第二種の生存者の集

団の差を加へたものに等しいのである。

上述のべたるが如く、この集団からは同種の集団の比が得られないから、これから計算されるものは確率ではなく、死亡係数であるが、この三角形の死亡者の集団は静態及動態統計から直接データが得られる関係上、従来特に深く研究せられたものである。特に、この係数と理論的な確率との関係を求めることが試みられた。今これについて簡単に紹介すると次の如くである。

Fig. 13.



上図において、先づ、$t_1 t_2$ 及び $t_2 t_3$ の二古代において同一の生残律が支配するものと假定する。即ち、

$$efg : bcd = eb : cd$$

とする。

次にこれを用いて上述の式を変形すると、

1.

[illegible]

$$= abc + abg + \text{[illegible]} - abg$$

$$= abcg + abg\,\frac{cd - ab}{ab}$$

となる。

更に一ケ年内に生ずる死亡者は均一に分布している。即ち、abg 内の死亡数は $abcg$ 内の死亡数の二分の一である、と假定して、右式を次の如く変形する。

$$abdc = abcg + \frac{1}{2}\,abcg\,\frac{cd - ab}{ab} = abcg\left(1 + \frac{cd - ab}{2ab}\right)$$

$$= abcg\,\frac{ab + cd}{2ab}.$$

又他方において、

$$K = \frac{2\,abdc}{ab + cd} = \frac{abcg}{ab} = \frac{abcg}{bg - abg}$$

$$= \frac{abcg}{bg - \frac{abcg}{2}} = \frac{\frac{abcg}{bg}}{\frac{abcg}{2\,bg}}$$

$$K = \frac{p_x}{1 - \frac{p_x}{2}} \qquad p_x = \frac{K}{1 + \frac{K}{2}}$$

又同様にして、

$$m_i = \frac{q_i}{1-\frac{q_i}{2}} \qquad q_i = \frac{m_i}{1+\frac{m_i}{2}}$$

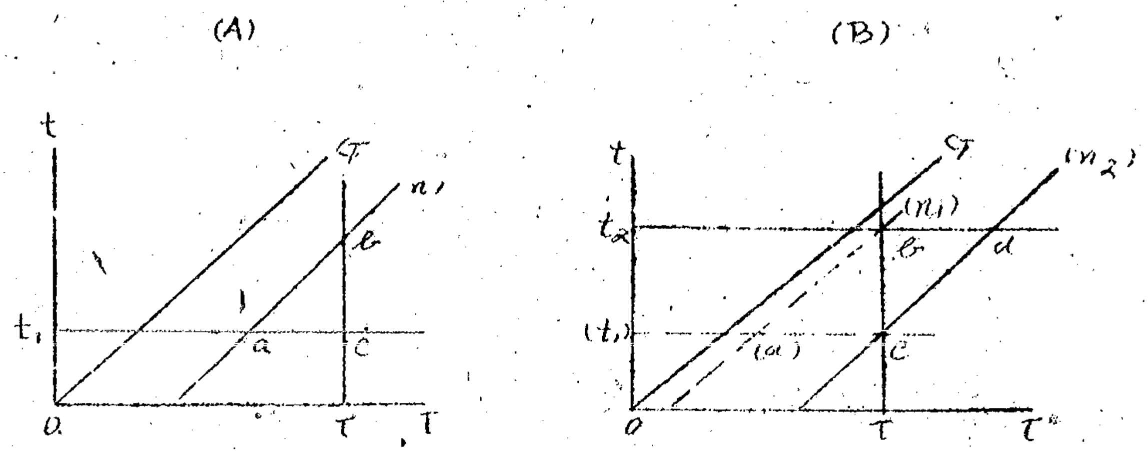
が得られる。

(ロ) 死亡者の基礎集団

上段のべた第一種の死亡者の主要集団からは死亡確率が得られるのであるが、前記の如く、静態及動態統計資料からはこの確率計算に必要なデータが直接得られない。このため更にこの集団とデータを直接利用しうる如き形に分析する必要がある。

このためにこの集団を更に次図の如く三角形の集団に分割して考察すると、第一種の死亡者の基礎集団の $\delta_x' = \delta_x^{I}$ と第二種の死亡者の基礎集団 $\delta_x'' = \delta_x^{II}$ とが得られる。

Fig 14



$abc = n_1\sigma_\tau'$　　　$bcd = {}_{\tau}\sigma_{n_2}^{II}$

上図から明らかに次の関係が得られる

$abc'' = ab - ac$

或いは、$n_1\sigma_\tau^{II} = \Gamma_{n_1}^{I} - \Gamma_\tau^{II}$

即ち、第一種の死亡者の基礎集団は第一の生存者の主要集団と第二種の生存者の主要集団との差に等しい。

更に右の方程式から

$ab = bc + abc$

或いは、$\Gamma_{n_1}^{II} = \Gamma_\tau^{I} + n_1\sigma_\tau^{I}$

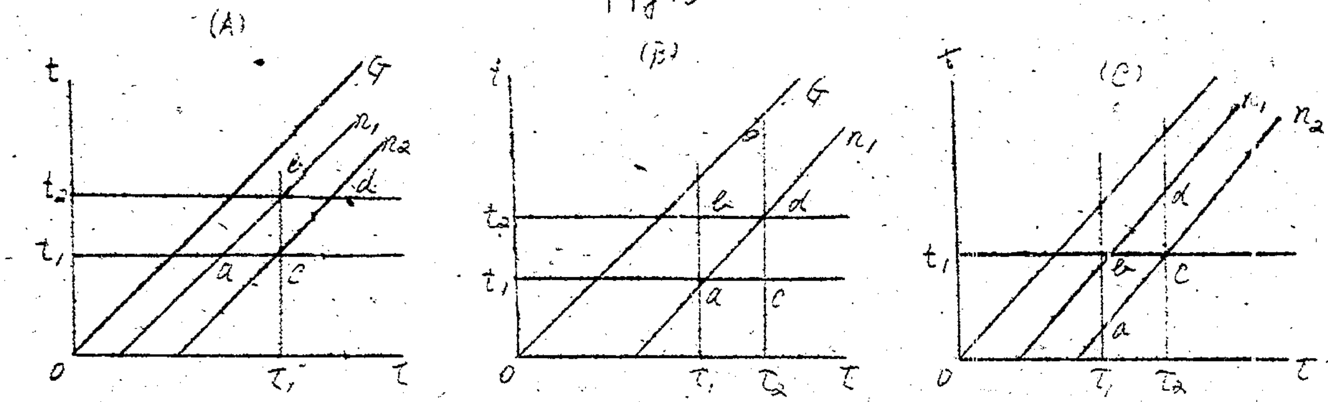
となり、即ち、第一種の生存者の主要集団は第二種の生存者の主要集団に第一種の死亡者の基礎集団を加へたものに等しいのである。

この関係によって上記の同令生存者の死亡確率 $P_x = \frac{M^{I}}{L^{D}_{x!}}$ は静態及動態統計資料から容易に計算しうる途が開かれた訳である。即ち、上段の式に関係を援用して P_x は次の如く変形することが出来る。

$$P_x = \frac{a b d_c}{a b} = \frac{abc + acd}{ac + abc} = \frac{{}_x G^{I}_{\tau} + {}_{\tau} G^{II}_{x2}}{L^{II}_{\tau} + G^{I}_{x1\,\tau}}$$

又更にこの二種の死亡者の基礎集団から次の如き、所謂要素確率 Elementarwahrscheinlichkeiten を求めることが出来る。

Fig 15



$abcd = abc + bcd$

$M' = {}_{n'}G'_{\tau'} + {}_{\tau'}G''_{n2}$

$\pi n = \frac{abc}{ab} = \frac{{}_{n'}G'_{\tau_1}}{L^2_{n'}}$

$\pi\tau = \frac{bcd}{bc} = \frac{{}_{\tau_1}G''_{n2}}{L''_{\tau_1}}$

$abcd = abd + acd$

$M'' = {}_{\tau_1}G''_{n1} + {}_{n'}G'_{\tau_2}$

$\pi'_n = \frac{acd}{ad} = \frac{{}_{n}G'_{\tau_1}}{L_{n'_1}}$

$\pi_\tau = \frac{abd}{ab} = \frac{{}_{\tau_1}G''_{n1}}{L\tau'_1}$

$abcd = abc + bcd$

$M^{III} = {}_{\tau_1}G''_{n2} + {}_{n'}G'_{\tau_2}$

この要素確率は夫々完全な確率の一部分で略々その二分の一に等しい、

(四)なお、上段のべた所から死亡確率計算の一般的シエーマを示すと次の如くである。

(五)更に上段のべた事柄の実際への応用例を示せば次の如くである。

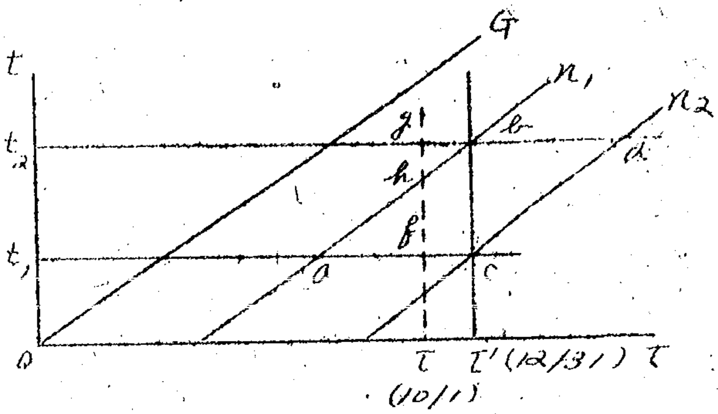
先づ、右にのべたシエーマは国勢調査が毎年末に行はれるものと仮定したのであるが、わが国の如く毎年末に行はれない場合は次の如くに計算出来る。

調査時点 1940.12.31. (て)

年令 (x)	出生年次 (T−x)	調査時点の生存者	死亡者 50才に達する以前に死亡せる者	死亡者 50才に達して51才に達せざる前に死亡せる者	死亡確率
1	2	3	4	5	6
50	1940−50 =1890	bc	abc	bcd	$\frac{abc+bcd}{bc+abc}$

Fig. 16

(i)



上図において、

$dgh = gh - dh$

$afh = ah - fh$

$dh = gh - dgh$

$-ah = fh + afh$

$ah = fg + afh - hgh$

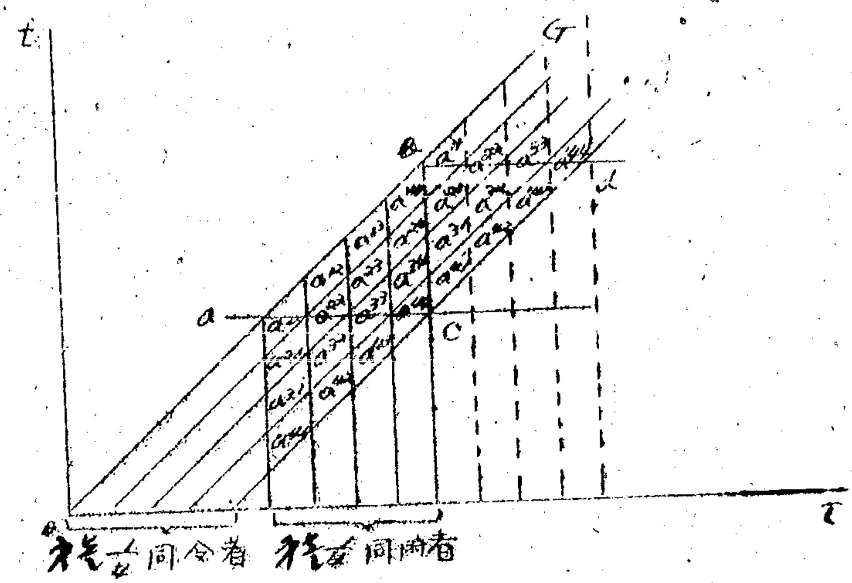
$\therefore Ph = \dfrac{afh + hc + h + hcd}{fg + af + h - hgh}$

乳児死亡率の計算

幾何学的表現法においては、以上においてはデータとの関係上概ねその生命現象の要素、年令、観察時、出生時の単位を一年と考へたものであるが、この単位は任意に拡大乃至縮少して考察することが可能である。例へば、目的により、十年、五年、二年、一ケ月、一日等と何れの単位を使用することも可能である。この性質を利用して~~よ~~り正確な乳児死亡率を計算することが出来る。

周知の如く乳児死亡率は乳児の年令の如何により著しく異っているので、此処では前記の様に一般的に一ケ年乃至一才を単位とする死亡率で妥当ではない。従って正確を期すると観察期間、年令を月別、更に、日別にとる必要がある。然し、実用的には四分の一年四分の一才の要素確率で十分である。その計算法の概要をのべると次の如くである。但し、この際、乳児死亡においては年令が進むに従い死亡速度の低下が急激であるという性質上、分母には出生総数（図の ab）を用いるので、分子のみを特別に計算すればよい。又相隣接する期間における出生は略々相等しいから、死亡者の集団としてデータの容易に得られる第三種の死亡者の集団を利用する。

Fig. 17.



上図において、a_1、a_2、a_3、a_4、を第一、第二、第三、第四の各四分の一才で死亡する乳児の集団とし、又、第一四分の一才の乳児が第一、第二、第三、第四の四分の一年内に死亡する者の集団を a_{11}、a_{12}、a_{13}、a_{14} とする。この場合 $q'' =$ [illegible] は次の如く考へられる。

[illegible]

にしてこれは略々次の如くになる。

$$abc \doteqdot \frac{1}{2}a_{11} + a_{22} + a_{13} + a_{14} + \frac{1}{2}a_{22} + a_{23} + \frac{1}{2}a_{33} + a_{34} + \frac{1}{2}a_{44}$$

$$bcd \doteqdot \frac{1}{2}a'_{11} + a'_{21} + \frac{1}{2}a'_{22} + a'_{31} + a'_{32} + \frac{1}{2}a'_{33} + a'_{41} + a'_{42} + a'_{43} + \frac{1}{2}a'_{44}$$

故

$$abc + bcd \doteqdot \frac{1}{2}(a_{11} + a'_{11}) + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a'_{21} + \frac{1}{2}(a_{22} + a'_{22}) + a_{23} + a_{24} + a'_{31} + a'_{32} + \frac{1}{2}(a_{33} + a'_{33}) + a_{34} + a'_{41} + a'_{42} + a'_{43} + \frac{1}{2}(a_{44} + a'_{44})$$

従つて、これによりPを計算することが出来る。

第二　統計的方法としての意味

右に専らその形式的技術的側面を概観したが、更にこれを介して統計的方法として何ういう意味をもつか若干考察してみる。

一、幾何学的表現法は図表現によつて複雑な現実の抽象化による概観 Übersichtlichkeit を追求するものであることは上数段を通じて分た如くである。

更に、之は一般の図表現と異り、データそのものを表現するのでなく、専ら上段の述べた如き図式により「純形式的」に統計集団間の関係を限定するもので、言い換へればば、Mit Daten Operieren するものでなく、ohne Daten Operieren するものである。この意味において更に抽象化を押し進めているので、此処にこの方法の特質があるといえよう。この意味で人口動態の純形式理論といわれている。特にこの点で最も徹底した方法は Zeuner のものと比較すれば明らかなる如く、Lexis 及 Becker による平面への表現法で、これにより集団の時間的限定は図表現の枠内で端的に得られる。即ち、生存者の集団は線で、死亡者の集団はこの線を一辺とする四辺形乃至三角形によって限定され関係の概観が端的に得られる。なお、更に之は W. Winkler により統計学一般の問題として線集団、点集団なる概念に迄発展したことは周知のことである。

二、前段みた如く、これは一方では、関係の概観に不要なものは捨象して必要なも

ののみを取り出すという考へ方で図表現で可能な限り抽象化を押し進めて行くが、他方においては、かうして取り出されたものを拡大して描寫し、具象化している。そしてこの具象化により、單に統計的集団間の関係を明らかにするのみでなく、更に、その関係を幾何学的に証明し得るものである。且つ、この証明に基いて実際のデータを適用して計算が出来るという特質をもっている。幾何学的表現法について特に貢献のあつた Kemp は、この点について、解析的方法（積分）による結果が幾何学的表現法によって厳密に証明された結果と一致することが屢々あつたからこの方法は解析的方法の証明手段として必要であると説明している。

三、前段の Kemp の見解が明らかにする如く、幾何学的表現法は数理解析的方法に対する補助手段とみられるものではあるが、此処で更に数理解析的方法は何故に補助手段を必要とするか或は証明の必要な所以が問はれなければならないであろう。このためには当然統計的度量数乃至統計数の本質の反省に立ち歸らねばならぬであらう。

社会的集団の度量 Masse はその本質上質的度量である。従ってその度量における

量の増減関係は、例へば年令による死亡でみる如く、当然一定の質との関係において一定の限界内においてのみ妥当性をもつものである。或いは社会的集団における度量の連続性は理論上その質との関聯において考慮されなければならないものである。

ところで、幾何学的表現法は上段のべたるが如く抽象化して観察するもので、云はば複雑な現象について適当な細片を区切つて取り出し、次にこれを顕微鏡にかけて拡大して観察するが如き方法といへよう。従つて当然右にのべたる如き質的度量の観察にはこの顕微鏡的方法が有用であるは勿論、理論上是非とも必要方法といえよう。或いは一般に微視的現象に対しては抽象度の高い数理解析的方法が無条件に妥当するが、人口現象の如き巨視的現象に対してはその性質上右の意味で一段と具象化した幾何学的表現法が妥当であるといへよう。

この意味において幾何学的表現法は数理解析的方法の補助手段というより以上に、巨視的現象に対する独立せる統計的度量数という可きであらう。なお、この点につい

てZipfの「集団乃至人口の変化を記号によって表現し、且つこれを幾何学的構成によって概観せんとする数理統計学の一分派 eine andere Richtung である」という見解を附加しておかう。

四、更に、上段のべた所を数理解析的方法との関聯から總括すれば、所謂数理解析的方法は云はば一種の理想的表現、即ち、純理論的表現で、従って、幾何学的表現法で巨視的現象における連續性の関係が証明されると始めて数理解析的表現が可能になり、この方法が利用される。この事情は上段乃用せるZipfの見解が明らかに示している。

然し乍ら上段ののべたるが如く巨視的現象の本質上幾何学的表現法は、少くとも未だ数理解析的方法にかけられない分野で、必然的に要求されるものなることも上段みた如くである。

（三國技官）