安定人口理論における一考察

高　木　尚　文

第 1 節

安定人口に関するロトカの定理はつぎの通りである.

閉鎖人口（来住及び往住のない人口）において, 或る時点以後（年令別）死亡率及び出生率が一定不変ならば, 充分長い期間経過した後においては, この人口の動態率は不変となり, 同時にその年令構成もまた不変となる. しかしてかく安定した後における人口の増加率及び年令構成はうえの一定の死亡率及び出生率によつて定まり, 最初の人口の構造とは全く無関係である.

この論文では, このロトカの定理をつぎの二つの観点から研究しよう.

(A) 全人口にたいする安定人口の増加率, 出生率, 死亡率及び年令構造

上述のロトカの安定人口の出生率, 死亡率および自然増加率は女子人口についての値であるが, 経験の示すところによれば, 出生における男女の割合が略々一定である事実によつて, 女子人口についてのみ計算したこれらの率を直ちに全人口に関するものと考えても差支えないとした.

しかし厳密にいつて, 或時点以後女子の年令別出生率, 男女別年令別死亡率が一定, さらに出生における男女の割合を一定とした場合, 極限においてこの全人口の動態率は不変となることが証明されて, この安定人口の出生率 .死亡率, 増加率および男女別年令構造が計算できれば, 一定不変と仮定された女子の年令別出生率, 男女別年令別死亡率が意味するところの極限における安定人口の男女別出生率, 死亡率および増加率また全人口にたいする男女別年令構造及び年令別の男女性比が明となる.

(B) 普通出生率および年令別死亡率を一定とした場合

ロトカの定理においては, 出生率について, 女子の年令別出生率が一定であるとの仮定をおいている. この仮定は非常に厳しい仮定であると同時に, うえの出生率の仮定の下にひき出される安定人口の概念は静止人口の概念とは全然違つたカテゴリーに属する. というのは静止人口の概念規定の中には年令別出生率の概念は全然なく, 唯普通出生率と男女年令別死亡率の概念の下に, 普通出生率と普通死亡率が等しい人口として所謂生命表の静止人口は構成されているからである.

故にロトカの定理における女子の年令別出生率一定の仮定を普通出生率一定の仮定におきかえて安定人口に関するロトカの定理を誘導しない限り, 静止人口の概念との間にギャツプを感ずる. さらに普通出生率一定という仮定をさらにゆるめて, 普通出生率が窮極において或る一定値に近ずく人口という一つのカテゴリーを考えると, ロトカの定理によりそのカテゴリーの中に年令別出生率が一定である人口という一つのカテゴリーが包含される.

いいかえれば, この仮定の下に証明される定理はロトカの定理を含むことになり, 窮極において静止人口になるカテゴリーは当然このカテゴリーに包摂される(1).

この命題は後述するごとく, 近年問題となつている人口の老令化現象がつぎの二つの要因——出生の減退と死亡の低下——によつてひき起されると考えられるが, これら二要因の何れが強く作用しているかを解く鍵を与えるものである.

うえに述べた (A) , (B) の二つの問題について, 以下2節にわけ, 第2節において(A)の問題について, ロトカの定理を証明しあわせてその計算式を誘導する. 第3節においては(B)の問題について説明し人口の老令化現象に論及する.

(1) 年令別死亡率は常に一定（→一定）という条件の下に

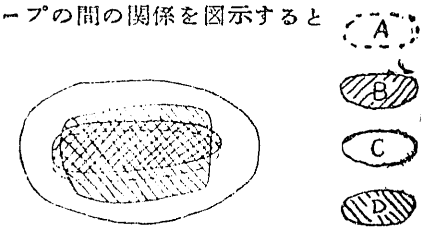
A： 年令別出生率が常に一定という仮定を満足する人口の構成する集団

B： 普通出生率が一定という仮定を満足する人口の構成する集団

C： 普通出生率が極限において或一定値に近ずく（普通出生率→一定）という条件を満す人口の構成する集団

D： 極限において静止人口となる人口の集団

とする。それらの3つのグループの間の関係を図示すると



第 2 節

全人口にたいするロトカの定理

男女別年令別死亡率及び女子の年令別出生率が一定，さらに出生における男女の割合も一定であるとするならば，極限において，その人口の出生率，死亡率および増加率は一定となり且人口の男女別年令構造も安定し，これはうえの一定の年令別死亡率，出生率および出生性比にのみデペンドして定まり，最初の年令構成とは無関係である．

この定理の証明は前述のロトカの定理と全くパラレルに出来るが，つぎにこれを示そう．

時点tにおける総人口をP（t）とし，$(x, x+dx)$ 才の年令構成係数を，男については $C_x^{(1)}(t)dx$，女については $C_x^{(2)}(t)\,dx$ でもつてあらわせば（以下同断），時点 t における $(x, x+dx)$ 才の人口は

$$P(t)\,C_x^{(i)}(t)\,dx \qquad (i=1,\ 2)$$

であらわされる．

仮定によつて，x 才の女子の出生率は一定不変，すなわち t にインデペンデントであるから，f_x で表わされる．

したがつて，期間（t, t+dt）における出生数は

$$B(t)\,dt = dt\int_0^{\omega} P(t)\,C_x^{(2)}(t)\,f_x\,dx.$$

B(t)を時点 t における出生函数とよぶ．

したがつて

$$B(t) = \int_0^{\omega} P(t)\,C_x^{(2)}(t)\,f_x\,dx$$

しかるに，仮定により男女別年令別死亡率が一定であり，したがつて x 才の男女別生存数も一定不変でtにインデペンデントであるから，これらは $l_x^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ であらわせる．同様に出生における男女の割合も仮定によつて，一定不変であるから，$\alpha^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ であらわそう（こゝに，$\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}=1$）

しかるときは，

$$\alpha^{(i)}\,B(t-x)\,l_x^{(i)}\,dx\,dt = P(t)\,C_x^{(i)}(t)\,dx\,dt \qquad (i=1,\ 2)$$

であるから，

$$B(t) = \alpha^{(2)} \int_0^{\omega} B(t-x)\, l_x^{(2)}\, dx. \qquad (1)$$

この積分方程式を解くためには B (t) の形が必要である．そこで

$$B(t) = Qe^{rt}$$

とおくと，(1)式より

$$1 = \alpha^{(2)} \int_0^{\omega} e^{-rx} l_x^{(2)}\, f_x\, dx \qquad (2)$$

をうる．

したがつて，方程式(2)を満足する r の各々の値にたいして，積分方程式(1)は

$$B(t) = Qe^{rt}$$

なる解をもつ．

いま方程式(1)を満足する r の値を

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

とするとき，

$$B(t) = Q_0 e^{r_0 t} + Q_1 e^{r_1 t} + \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

もまた積分方程式(1)を満足するから，(3)は積分方程式(1)の一般解を与える．

さて方程式(2)を満足する根の数は無数に存在するが，実根は唯一つしかない．何故ならば， r を実数とするとき，函数

$$F(r) = \int_0^{\omega} e^{-rx}\, l_x^{(2)}\, f_x\, dx$$

は (−∞，＋∞) で微分可能で，

$$F(-\infty) = +\infty, \qquad F(\infty) = -\infty$$

且

$$\frac{dF}{dr} = -\int_0^{\omega} x e^{-rx}\, l_x^{(2)}\, f_x\, dx$$

は仮定により常に負であるから，F (r) は単調減少函数である．

故に　$F(r) = \dfrac{1}{\alpha^{(2)}}$　は唯一つの実根をもつ．

方程式 (2) にたいして，この実根 r_0 のほかに前述のごとく無数の複素数根が存在する．いまこの複素数根の一つを $u+iv$ とおけば，(2)式より

$$\alpha^{(2)} \int_0^{\omega} e^{-ux} \cos vx\, l_x^{(2)}\, f_x\, dx = 1,$$

$$\int_0^{\omega} e^{-ux} \sin vx\, l_x^{(2)}\, f_x\, dx = 0$$

をうる．したがつて共軛なる複素数 $u-iv$ もまた根となる．

さて cos vx は常に

$$\cos vx < 1$$

であり，一方実根 r_0 にたいして

$$\alpha^{(2)} \int_0^{\omega} e^{-r_0 x}\, l_x^{(2)}\, f_x\, dx = 1$$

であるから，積分範囲のすべての x にたいして

$$e^{-ux} > e^{-r_0 x}$$

が成立せねばならない．

故に

$$u < r_0.$$

故に唯一つの実根 r_0 はすべての複素数根の実数部分よりも大である．

出生函数(3)は

$$B(t) = Q_0 e^{r_0 t} + \Sigma Q_n e^{u_n t} (\cos v_n t + i \sin v_n t)$$
$$= Q_0 e^{r_0 t} + \Sigma e^{v_n t} (C_n \cos v_n t + D_n \sin v_n t)$$

と変形できるから，$B(t)$ は $t \to \infty$ なるとき $Q_0 e^{r_0 t}$ が主要部分となりこれに支配される．

故に

$$B(t) \backsim Q_0 e^{r_0 t}. \tag{4}$$

しかるに時点 t における $(x, x+dx)$ 才人口は

$$P(t)\, C_x^{(i)}\, dx = \alpha^{(i)}\, B(t-x)\, l_x^{(i)}\, dx \qquad (i = 1, 2) \tag{5}$$

であるから，

$$P(t) = \int_0^{\omega} B(t-x)\, (\alpha^{(1)} l_x^{(1)} + \alpha^{(2)} l_x^{(2)})\, dx.$$

故に

$$P(t) = Q_0 e^{r_0 t} \int_0^{\omega} e^{-r_0 t}\, (\alpha^{(1)} l_x^{(1)} + \alpha^{(2)} l_x^{(2)})\, dx.$$

故に(4)と(5)とから，

$$C_x^{(i)}(t) \backsim \frac{\alpha^{(i)}\, e^{-r_0 x}\, l_x^{(i)}}{\int_0^{\omega} e^{-r_0 x}\, (\alpha^{(1)} l_x^{(1)} + \alpha^{(2)} l_x^{(2)})\, dx} \qquad (i = 1, 2)$$

をうる．

各辺の値は t に無関係であるから $t \to \infty$ とするとき，$C_x^{(i)}(t)$ は一定の値に近ずく．すなはち，年令別の出生率，男女別年令別死亡率ならびに出生性比が一定ならば，極根において人口の年令構成は一定である．しかしてその値は前述の出生率，死亡率ないし出生性比のみにデペンドすることがわかる．

さて年令構成が一定の極限値をもつことが証明されたから，女子の年令別出生率，男女別年令別死亡率が一定であるという仮定によつて，明かに普通出生率(b)，普通死亡率(d)，したがつて普通増加率(r)も一定の極限値をもつ．

ロトカの人口学的函数はこの場合

$$\begin{cases} C_x^{(i)} = b\alpha^{(i)}\, e^{-rx}\, l_x^{(i)} & \text{(i)} \\ \dfrac{1}{b} = \int_0^{\omega} e^{-rx}\, (\alpha^{(1)} l_x^{(1)} + \alpha^{(2)} l_x^{(2)})\, dx & \text{(ii)} \\ 1 = \alpha^{(2)} \int_0^{\omega} e^{-rx}\, l_x^{(2)}\, f_x\, dx & \text{(iii)} \end{cases}$$

である．

以上の三つの人口学的函数をといて，r, b, d をもとめるのであるが，こゝでロトカの方法によつて誘導される計算式を掲げておく．

$$r = \frac{1}{\beta}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta \log_e \alpha^{(2)} R_0}\right),$$

こゝに

$$R_n = \int_0^{\omega} x^n \, l_x^{(2)} \, f_x \, dx$$

とするとき，

$$\alpha = \frac{R_1}{R_0}, \qquad \beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0}.$$

また

$$b = \frac{1}{L_0} e^{\int A' dr}. \tag{6}$$

たゞし

$$A' = u + vr + wr^2$$

とすれば，

$$\int A' dr = ur + \frac{1}{2} vr^2 + \frac{1}{3} wr^3 \tag{6'}$$

をうる．

こゝに

$$L_n = \int_0^{\omega} x^n \left(\alpha^{(1)} l_x^{(1)} + \alpha^{(2)} l_x^{(2)} \right) dx$$

とすれば，

$$u = \frac{L_1}{L_0},$$

$$v = u^2 - \frac{L_2}{L_0},$$

$$w = u^3 - \frac{3}{2} u \frac{L_2}{L_0} + \frac{1}{2} \frac{L_3}{L_0}.$$

第 3 節

拡張されたロトカの定理

閉鎖人口において，普通出生率が一定の極限値をもち，或る時点以後男女別年令別死亡率も一定且出生性比 $\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} ; \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1\}$ も一定ならば，この人口の動態率は一定の極限値をもち，同時にその年令構成もまた一定の極限値をもつ．

すなわち前述のロトカの定理のごとく安定人口をうる．しかしこの定理は第1節で述べたごとく，ロトカの定理を含むとともに，静止人口の概念と従来の安定人口の概念の間のギヤツプを埋める役割を演ずる．

この定理の証明において普通出生率を一定としても一般性を失わない．

故に一定なる普通出生率を b とし，時点 t における総人口を P（t）とするとき，期間（t, t + dt）における出生数は，

$$\underbrace{bP(t)\,dt}_{\text{出生総数}} = \underbrace{\alpha^{(1)}\,bP(t)\,dt}_{\text{男の出生数}} + \underbrace{\alpha^{(2)}\,bP(t)\,dt}_{\text{女の出生数}}$$

故に時点 t における総人口 P（t）は

$$P(t) = \int_0^{\omega} bP(t-x) \left\{ \alpha^{(1)} l_x^{(1)} + \alpha^{(2)} l_x^{(2)} \right\} dx \tag{7}$$

で表わされる．

この積分方程式(7)は積分方程式(1)と同一の形であるから第2節におけると同様に

$$P(t) = Qe^{rt}$$

とおくことにより

$$1 = b\int_0^{\omega} e^{-rx} \left\{ \alpha^{(1)}\ l_x^{(1)} + \alpha^{(2)}\ l_x^{(2)} \right\} dx \qquad (8)$$

をうる．

方程式(8)を満足する根 r は無数あるが，そのうち実根は唯一つで，他は複素数根であり，しかもその実根はすべての複素数根の実数部分より大となることの証明は第2節の方程式(2)の根についてと全く同一である．

故にその実根を r_0 とすると，

$$P(t) \backsim Qr^{r_0 t}.$$

すなわち自然増加率が一定であることが結論される．

r が一定になることがわかつたから，公式(6)から与えられた b に対応する r を，(6)，(6)′ から誘導される三次方程式をとくことによつて求めることが出来る．

つぎにうえの拡張されたロトカの定理の応用として，人口の Ageing の原因について論じよう．

一体人口の年令構造は過去の出産力，死亡及び移動の Trend によるのであるがこゝでは移動の影響は考えないことにする．

普通，人口の Ageing は全部ではないにしても，主として死亡率の低下の結果であるだろうという誤謬を犯している．こゝではこの見解の誤りであることを理論的に示すのが目的である．

静止人口にたいする誤つた議論

周知のごとく，或る静止人口は一定の死亡秩序の下に年々一定の出生数から結果する．

通例各年の出生数を 100,000 と仮定して，各年令までの生存率によつて決定される L_x の値によつて与えられる．

二つの静止人口を比較する場合，年10万の出生数は死亡率が低い年令階級にはより多い生存数が対応する．

つぎの表はわが国の第6回の国民生命表の女子と厚生省人口問題研究所の第8回簡速静止人口表の女子の静止人口である．

第1表　女子の静止人口表

年令階級	局 6 表 (昭10.4～11.3)	人口研簡8表 (昭29.4～30.3)	年令階級	局 6 表 (昭10.4～11.3)	人口研簡8表 (昭29.4～30.3)
0 ～ 4	437,789	476,126	50 ～ 54	283,332	411,329
5 ～ 9	411,180	469,222	55 ～ 59	261,789	391,512
10 ～ 14	404,775	467,385	60 ～ 64	234,214	362,494
15 ～ 19	392,677	465,421	65 ～ 69	198,001	320,704
20 ～ 24	374,820	461,779	70 ～ 74	152,085	263,814
25 ～ 29	358,046	456,458	75 ～ 79	99,384	193,084
30 ～ 34	343,656	450,266	80 ≦	67,972	184,469
35 ～ 39	329,697	443,469	総数	4,965,480	6,679,075
40 ～ 44	315,378	435,495	60 ≦	751,656	1,324,478
45 ～ 49	300,685	425,297	60以上の割合	15.14%	19.83%

2)　低下する死亡率換言すれば増加する平均年令は単に老令人口についてだけではなくすべての Age Groups について，人口を増加せしめる．

第1表によつてみるに，各年令階級とも昭和29年の方が昭和11年よりも静止人口数が大である．それ故に，出生数が同じ10万でも昭和10年の方は総数4,965,480にたいしてであり，昭和29年の方は総数6,679,075にたいしてである．すなわちこれらの静止人口の出生率はそれぞれ 20.15‰，及び 14.97‰ である．

故に60才以上の人口割合が15.14％および19.83％を示しているのは単に死亡率の変化にのみデペンドしてのことではなくて，それぞれの人口の出生率が異なることを看過しては過誤を犯すことになる．

したがつて，死亡率の低下の影響を明にするための一方法として，局6表の示す出生率20.15‰と昭和29年の死亡率を組合わせて得られる安定人口（拡張されたロトカの定理によつて）を計算して，相互の人口構造を比較する．

かくして計算された安定人口の60才以上人口の年令構成係数は14.68％を示し，死亡率の格段の低下にも拘らず，むしろ老令化よりは人口の若返りをさえ示している．これによつて老令化現象は死亡率の低下よりも出生率の低下が与つて力があることがわかる．

第2表　出生・死亡を種々変化さした場合の静止・定安人口の年令構成の比較　（第1図参照）

年令階級	静止人口（死亡 局6 / 出生 局6）(1) 20.15‰	安定人口（死亡 人口研8 / 出生 局 6）(2) 20.15‰	静止人口（死亡 人口研8 / 出生 人口研8）(3) 14.97‰
0 〜 4	8.78	9.41	7.14
5 〜 9	8.28	8.88	7.03
10 〜 14	8.16	8.48	7.00
15 〜 19	7.91	8.09	6.97
20 〜 24	7.55	7.70	6.91
25 〜 29	7.21	7.29	6.83
30 〜 34	6.92	6.90	6.74
35 〜 39	6.64	6.51	6.64
40 〜 44	6.35	6.13	6.52
45 〜 49	6.06	5.74	6.37
50 〜 54	5.71	5.32	6.16
55 〜 59	5.27	4.86	5.86
60 〜 64	4.72	4.31	5.43
65 〜 69	3.99	3.66	4.80
70 〜 74	3.06	2.88	3.95
75 〜 79	2.00	2.02	2.89
80 ≦	1.37	1.82	2.76
総数	100.00	100.00	100.00
0 〜 14	25.22	26.77	21.17
15 〜 59	59.62	58.54	58.99
60≦	15.14	14.68	19.83

この問題の解決に暗示を与える実例としてチリーとアメリカ合衆国の経験事実を挙げておこう．

チリーにおいては，出生率は今世紀の初め以来1940年まで確かに高率のまゝであり，同じ期間に死亡率は著しい低下を示した．にも拘らずチリーの国勢調査の結果は人口構造にきわめて僅かの変化しか示さず，1920，1930及び1940の各年において60才以上人口割合は実際的には同じである．

もう一つの例として，わが国の昭和12及び27年における女子の安定人口について同様の計算を行つた結果を示そう．

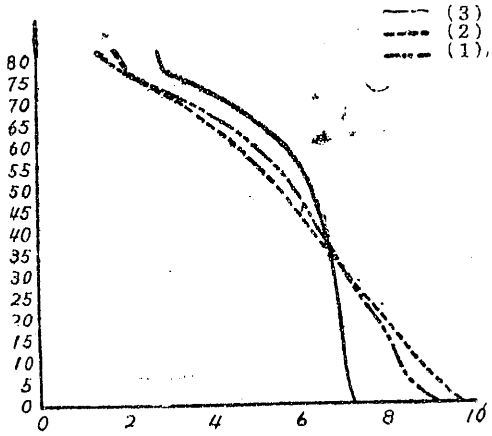
こゝに昭和 27 年の安定人口出生率は 30.23‰，昭和12年のそれは20.86‰である．

第3表　種々の動態率の下に計算された安定人口の年令構成比較

	(1)	(2)	(3)
死亡	昭和12年	昭和27年	昭和27年
出生	昭和12年 (30.23‰)	昭和12年 (30.23‰)	昭和27年 (20.86‰)
総数	100.00	100.00	100.00
0 〜 14	34.45	36.44	27.37
15 〜 59	56.46	55.07	58.83
60 ≦	9.09	8.49	13.80

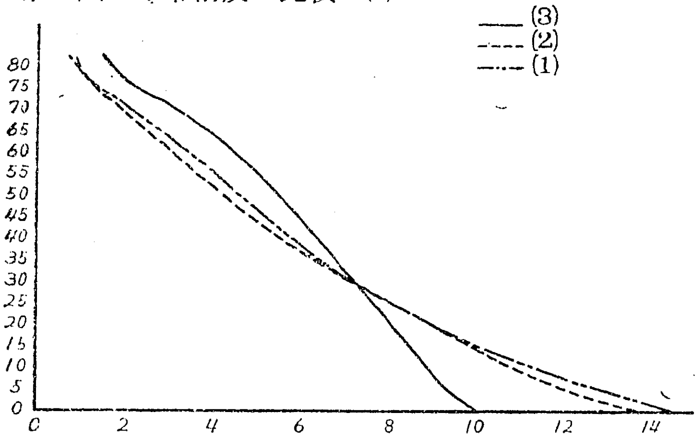
（第2図参照）

第1図　年令構成の比較　(1)



アメリカ合衆国では今世紀の初期において，出生率は30.1‰を示し常にそれが減少しつづけて

第2図　年令構成の比較　(2)



1935—1939において平均17.2‰を示すにいたつている。同じ期間に死亡率もまた三分の一だけ減じた。国勢調査の結果によれば，その期間における，60才以上人口の占める割合は急速に上昇した。

死亡率はアメリカ合衆国もチリーも下つていたが，出生率については両国において本質的に違つていた。これが合衆国人口が老令化しているのに一方チリーの人口が前と同程度に若い主たる理由である。

第4表　チリー，アメリカ合衆国の動態率(‰)

期　　間	アメリカ合衆国		チ　リ　ー	
	出生率	死亡率	出生率	死亡率
1900 — 1904	……4)	16.2	36.5	30.5
1905 — 1909	……	15.3	37.7	31.6
1910 — 1914	……	13.9	38.6	30.0
1915 — 1919	24.3	14.4	37.4	28.4
1920 — 1924	22.8	12.0	39.3	31.6
1924 — 1929	20.1	11.8	41.7	26.4
1930 — 1934	17.6	11.0	34.9	24.5
1935 — 1940	17.2	11.0	32.9	23.7

第5表　60歳以上人口の割合

国勢調査年　次	アメリカ	チ　リ　ー
1910	6.8	……
1920	7.5	5.9
1930	8.5	5.7
1940	10.4	5.9

3)　Population Bulletin of the United Nation No. 4 Dec. 1954.
4)　……は資料がないため不明