多次元人口成長の決定論的モデル

稲　葉　　寿

I　は　じ　め　に

本稿は，近年急速に発展をとげつつある多次元人口成長理論[1]における，決定論的なモデルを，多次元の Von Foerster 方程式系を用いて定式化しようとするものである．従来，人口論における数理モデルの多くは，出生と死亡，年齢構造などの自然的属性によってのみ特徴づけられた人口集団を取り扱ってきたのに対して，多次元理論は，対象人口の内部が，各時点において相互に排他的な有限個の「状態」へと，自然的ないしは社会的なカテゴリーに従って分類されている場合に，各状態の下に包括される人口の動態を把握しようとするものといえよう．

これまで，多次元理論における理論形成の試みは，古典的な人口学の諸手法と相即的に，一方における多次元生命表の理論的，実践的研究と，他方におけるそれに基づく多次元人口成長の投影モデル（Projection Models）の作製という，2つの側面においておこなわれてきた．しかしこのような問題を2つの部分に分けて考える手法は，実践的であるにしても，理論的には不満足なものであると筆者は考える．何故ならば，そのような思考法の結果として，最も基礎的とみなされる諸仮定，諸函数から出発して理論を一つの自己完結的なシステムとして構成するという態度が見失なわれ，動態モデルの解の存在条件等の最も原理的な側面が閑却されることになったからである．さらに具体的に言うならば，動態モデルの基礎たるべき微分方程式の不在という事態を放置することとなったため，状態間推移の規則が時間的に非定常な場合に対する考察が抜けおちてしまったことがあげられよう．このことは溯って考えるならば，ロトカ（Lotka, A. J）による古典的な人口モデルにおいてすでに胚胎していたことである．彼（ロトカ）が，コーホートの挙動を記述する微分方程式ではなく，新生児出生率に対する積分方程式を理論の基礎として以来，それが人口学者の実践的願望に適合的であったことにも促されて，上記のような「二分法」的思考が，多くの人口研究者に対する「認識論的障害」（G. バシュラール）として作用し続けることとなったと言えよう．しかしながら，今日そのような思考法が，理論成長の桎梏へと転化していることは極めて明らかである．従って，以下で重要なことは，多次元人口成長のモデルを，微分方程式を用いることで，それ自身で完結した一つの動態システムとしてし表示することであり，そのことを通じて，そのような（決定論的な）モデルのもつ可能性と限界を明瞭なものとすることに他ならない．第Ⅱ章では決定論的モデルの一般的定式を述べ，Ⅲ章ではその具体的適用例として多地域人口成長モデルとその性質を考察する．そしてⅣ章では函数空間の写像という考え方を導入して，人口成長過程の一般的特徴づけをおこない，エルゴード性の概念を定式化する．

1）この分野は名称も範囲もいまだ確定しているとはいえない．最近の理論的集成としては以下がある．
Kenneth C. Land and Anderei Rogers, ed., "*Multidimensional Mathematical Demography*", New York, Academic Press, 1982.

以下で用いる記号を次のように定めておく．

$\mathbf{R}=(-\infty, +\infty)$; 実数体

$\mathbf{R}^+=[0, +\infty)$; 0以上の実数全体

$\mathbf{C}$; 複素数体

$C(A)$; 集合A上の連続函数全体

$C^+(A)=\{f; f\in C(A),$ かつ $f\geqq 0\}$

$f(x)$, $g(x)$, 等; スカラー函数

$\boldsymbol{b}(t)=(b_1(t), \cdots\cdots b_n(t))$; ベクトル値函数

$$A(r)=\begin{pmatrix} a_{11}(r)\cdots\cdots\cdots a_{1N}(r) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{N1}(r)\cdots\cdots\cdots a_{NN}(r) \end{pmatrix}$$; 行列（函数）

又，特に紙面制約を考えて，ベクトルとしては横ベクトルを一貫して用いる．

II　決定論的モデルの一般論

1．基礎方程式の導出

以下では，十分に大きな単性の人口集団[2]を考える．それの成員は相互に排他的なN個の「状態」と呼ばれる部分集合に分割されているとしよう．即ち，各成員は各瞬間に，いずれか一つの状態に所属していて，かつ2つ以上の状態に同時に属することはないものとする．このときさらに第（$N+1$）状態として「死亡状態」という特別な状態を附加しておく．i状態（$1\leqq i\leqq N$）は，生存状態の内部状態であり，その各々に対しては，年齢密度函数 $p_i(r, t)$ が定義されるものとしよう．即ち，時刻 t で状態 i に生存している年齢 r 歳未満の人口数を $F_i(r, t)$ として，F_i は連続微分可能と仮定すれば $\partial F_i/\partial r\equiv p_i(r, t)$ であり，$F_i(r, t)=\int_0^r p_i(x, t)\,dx$ となる．$\boldsymbol{p}(r, t)=(p_1(r, t), \cdots\cdots, p_N(r, t))$ とおいて $\boldsymbol{p}(r, t)$ を分布ベクトルと呼ぶ．次に，時刻 t に r 歳で状態 i に生存していた個体群のうちで，$s(\geqq 0)$ 時間後に，状態 j に遷移しているものの割合を $n_{ij}(r, t\mid s)$ と書いて，これを i から j への推移率と呼ぶ．以下ではこの推移率に対して次の合成法則が成り立つことを仮定する．

(1)
$$n_{ij}(r, t\mid s_1+s_2)=\sum_{k=1}^{N+1} n_{ik}(r, t\mid s_1)\, n_{kj}(r+s_1, t+s_1\mid s_2)$$

この仮定は，状態遷移の発生率は各状態を構成している個体の履歴に無関係であることを意味している．n_{ij}を遷移確率と解釈する際には，これはマルコフ性の仮定と呼ばれる事態の表現（Chapman-Kolmogoroff の方程式）に他ならない．

---

2) ここでは，外部からの移入のない閉鎖集団とする．又その大きさは，連続函数による表現が意味をもつ程度に大であるとする．

ここで，

(2)
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} n_{ij}(r,\ t|s) = 1 & (1 \leqq i \leqq N+1) \\ n_{ij}(r,\ t|s) \geqq 0 & \\ n_{N+1,j}(r,\ t|s) = 0 & (1 \leqq j \leqq N) \\ n_{N+1,N+1}(r,\ t|s) = 1 & \\ n_{ij}(r,\ t|0) = \delta_{ij} & (1 \leqq i,\ j \leqq N+1) \end{cases}$$

が成り立つとしておこう．(2)の意味は n_{ij}の定義から明らかであろう．
$n_{ij}(r,\ t\mid s)$ を第 $(i,\ j)$ 要素とする $(N+1)$ 次の行列を $\widetilde{N}(r,\ t|s)$ とおき，さらにその N 次の首座行列をとって $N(r,\ t|s) \equiv [n_{ij}(r,\ t|s)]\ 1 \leqq i,\ j \leqq N$ として，これを推移行列と呼ぶ．このとき次式がなりたつ．

(3)
$$\begin{cases} N(r,\ t|s_1+s_2) = N(r,\ t|s_1)\,N(r+s_1,\ t+s_1|s_2) \\ \boldsymbol{p}(r,\ t)\,N(r,\ t|s) = \boldsymbol{p}(r+s,\ t+s) \end{cases}$$

(3)式の最初のものは(1)式から明らかであろう．２番目の式は次のようにしてわかる．時刻 t において j ー状態の r から $r+\Delta r$ 歳の人口は

$$\int_r^{r+\Delta r} p_j(\rho,\ t)\,d\rho$$

であるが，このうち s 時間後に i ー状態に移っている人口数は定義によって

$$\int_r^{r+\Delta r} p_j(\rho,\ t)\,n_{ji}(\rho,\ t|s)\,d\rho$$

である．このとき

$$\int_r^{r+\Delta r} p_i(\rho+s,\ t+s)\,d\rho = \sum_j \int_r^{r+\Delta r} p_j(\rho,\ t)\,n_{ji}(\rho,\ t|s)\,d\rho$$

であるから，両辺を Δr で割って，$\Delta r \to 0$とすれば，(3)の２番目の式を得る．さて，この式から $N(r,\ t\mid s)$ が決定されれば，$\boldsymbol{p}(r,\ t)$ の生命線 $r-t=\mathrm{cnst.}$ 上での挙動は決定される．そこで $N(r,\ t\mid s)$ を決めるために以下のような仮定を導入する．

（仮定Ｉ）全ての状態 i に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-n_{ii}(r,\ t|h)}{h} = -a_{ii}(r,\ t)$$

となる　$a_{ii}(r,\ t) \in C(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+)$ が存在する．

（仮定Ⅱ）任意の $j,\ k\ (j \neq k)$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{n_{jk}(r,\ t|h)}{h} = a_{jk}(r,\ t)$$

となる　$a_{jk}(r,\ t) \in C(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+)$ が存在する．

このような $a_{ij}(r,\ t)$ に対しては，(2)式から

(4)
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij}(r,\ t) = 0 & (1 \leqq i \leqq N+1) \\ a_{ii}(r,\ t) \leqq 0, \quad a_{jk}(r,\ t) \geqq 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つ．以下では特に $a_{i\,N+1}(r,\ t)\equiv\mu_i(r,\ t)$ とおいて，$\mu_i(r,\ t)$ を i 一状態の死亡力函数と呼ぶ．従って

(5)
$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(r,\ t)=-\mu_i(r,\ t) \qquad (1\leqq i\leqq N)$$

又，$a_{ij}(r,\ t)$ を $(i,\ j)$ 要素とする行列を $A(r,\ t)$ と書いて，$N(r,\ t\mid s)$ の生成行列と呼ぶ．このとき次式が成り立つ．

(6)
$$\frac{\partial}{\partial s}N(r,\ t\mid s)=N(r,\ t\mid s)A(r+s,\ t+s)$$

証明：仮定Ⅰ，Ⅱから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[N(r+s,\ t+s\mid h)-I\Big]=A(r+s,\ t+s) \quad (\text{I:単位行列})$$

であることは明らか，そこで(1)式から

$$\frac{1}{h}\Big[N(r,\ t\mid s+h)-N(r,\ t\mid s)\Big]=\frac{1}{h}N(r,\ t\mid s)[N(r+s,\ t+s\mid h)-I]$$

ここで $h\to 0$ として(6)を得る（証明おわり）

$M(r,\ t\mid s)$ に対する方程式(6)から，$\boldsymbol{p}(r,\ t)$ のみたすべき式を導こう．作用素 D を，$f(r,\ t)\in C(\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+)$ に対して，

$$Df(r,\ t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(r+h,\ t+h)-f(r,\ t)}{h}$$

として定義しておくと[3)]，次式が成り立つ．

(7)
$$D\boldsymbol{p}(r,\ t)=\boldsymbol{p}(r,\ t)A(r,\ t)$$

これは(3)式から，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\boldsymbol{p}(r+h,\ t+h)-\boldsymbol{p}(r,\ t)\}=\boldsymbol{p}(r,\ t)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{N(r,\ t\mid h)-I\}$$

となるから明らかである．作用素 D は，被作用函数が全微分可能であったり，各変数について連続微分可能であったりする際には，

$$D\equiv\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial t}$$

となる．従って(7)は，一次元の場合の Von Foerster 方程式[4)]の多次元への拡張に他ならない．これを今後は単に基礎方程式と呼ぶ．

2．基礎方程式の初期値—境界値問題

前節で得た基礎方程式を，適当な初期値，境界値を与えて，その下で解くことを考えよう．初期条

3）作用素Dの導入は Gurtin, M. E&MacCamy. R. C, "Non-linear Age-dependent Population Dynamics", *Arch. Rational Mech. Anal.*, 54, 1974, pp.281－300, による．

4）Gurtin&MacCamy 前掲論文参照．又，多次元の Von Foerster 方程式を初めて提起したものとして，以下の論文がある．

Song Jian, Yu Jingyuan and Li Guangyuan, "Theory on Prospect of Population Evolution Processes", *Scientia Sinica*, Vol. XXIV, No. 2, 1981, pp.431－444.

件を $\boldsymbol{k}(r)=(k_1(r),\ \cdots\cdots,\ k_N(r))$, $k_i(t)\in C^+[0,\infty)$なるベクトル値函数として，同様に境界条件を $\boldsymbol{b}(t)=(b_i(t),\ \cdots\cdots,\ b_N(t))$, $b_i(t)\in C^+[0,\infty)$とする．このとき解くべきシステムは以下のようになる（これを Von Foerster 系と呼ぶ)．

$$
(1)\qquad \begin{cases} D\boldsymbol{P}(r,\ t)=\boldsymbol{p}(r,t)\ A(r,t) \\ \boldsymbol{p}(0,\ t)=\boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{p}(r,\ 0)=\boldsymbol{k}(r) \end{cases}
$$

ここで $\boldsymbol{k}(r)$ は $t=0$ における人口の分布（初期分布）を示し，$\boldsymbol{b}(t)$ は，単位時間あたりの出生数を示していることは言うまでもない．(1)の解 $\boldsymbol{p}(r,\ t)$ は，前節の式(6)によってきまる $N(r,t\mid s)$ が決定されれば以下のように求まる．

$$
(2)\qquad \boldsymbol{p}(r,\ t)=\begin{cases} \boldsymbol{k}(r-t)\,N(r-t,\ 0|t) & (r>t) \\ \boldsymbol{b}(t-r)\,N(0,\ t-r|r) & (r<t) \end{cases}
$$

但し，ここで $\boldsymbol{b}(0)=\boldsymbol{k}(0)$ （共立性の条件）がなりたっているとする．(2)が(1)の解となることは，代入して計算すれば容易に確かめることができる．そこで $N(r,\ t\mid s)$ を，$A(r,\ t)$ が与えられたものとして，決定することを考える．$(r,\ t)$ をパラメータとみなせば，前節の(6)式は，条件(2)の下で，次のような一階行列微分方程式の初期値問題を与える．

$$
(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}N(r,\ t\,|\,s)=N(r,\ t\,|\,s)\ A(r+s,\ t+s) \\ N(r,\ t\,|\,0)=I \end{cases}
$$

（I：単位行列）

この解行列は，$A(r+s,\ t+s)$ が連続であるような任意の閉区間 $[0,\ T]\ni s$ 上で以下のように逐次近似によって構成される．即ち，$(r,\ t)$ に依存する（N×N）行列の列 $\{M_k(r,\ t\mid s)\}$ を，

$$
(4)\qquad \begin{cases} M_0(r,t\,|\,s)=I \\ M_k(r,t\,|\,s)=I+\displaystyle\int_0^s M_{k-1}(r,\ t\,|\,\rho)\ A(r+\rho,\ t+\rho)\ d\rho \end{cases} \qquad (k\geqq 1)
$$

によって定義すれば，M_k は $[0,\ T]$上で(3)の解に一様収束することが示される[5] 従って，

$$
(5)\qquad N(r,t\,|\,s)=I+\int_0^s A(r+\rho,\ t+\rho)\ d\rho+\int_0^s\int_0^{\rho_1} A(r+\rho_2,\ t+\rho_2)\ d\rho_2\cdot A(r+\rho_1,\ t+\rho_1)\ d\rho_1+\cdots\cdots
$$

という表現を得る（Peano-Baker 級数)．特に，条件

$$
(6)\qquad A(r+s,t+s)\cdot\int_0^s A(r+\rho,\ t+\rho)\ d\rho=\int_0^s A(r+\rho,\ t+\rho)\ d\rho\cdot A(r+s,\ t+s)
$$

が成り立つ場合には(5)式は縮約されて，

$$
(7)\qquad N(r,t\,|\,s)=\ \exp\left(\int_0^s A(r+\rho,\ t+\rho)\ d\rho\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_0^s A(r+\rho,\ t+\rho)\right)^k d\rho
$$

となる．しかし交換可能性(6)は，$A(r,\ t)$ か定数行列であったり，スカラー函数と定数行列との積であるような，極めて例外的な場合にしかなりたたない．

5）山本稔，『常微分方程式の安定性』，実教出版，1979年，p.81以下参照．

このようにして決定された $N(r, t \mid s)$ は，s に関しては微分可能であり，さらにパラメータに関する解の連続性の定理から (r, t) に対して連続である．それ故(2)式から決定される $\boldsymbol{p}(r, t)$ は，$R^+ \times R^+$ 上で連続であり，かつ生命線，$t - r = \text{const.}$ に沿っては微分可能になっている．但し，各変数について偏微分可能とは限らない．以上によってシステム(1)の連続解を求められた．

最後に $N(r, t \mid s)$ 及び $\boldsymbol{p}(r, t)$ に関する関係式（積分）を導いておく．前節(6)の式を成分にわけてかくと

$$\frac{\partial}{\partial s} n_{ij}(r, t \mid s) = \sum_k n_{ik}(r, t \mid s)\, a_{kj}(r+s, t+s)$$

従って

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial s} n_{ij}(r, t \mid s) = \sum_k n_{ik}(r, t \mid s) \sum_j a_{kj}(r+s, t+s)$$

$$= -\sum_k n_{ik}(r, t \mid s)\, \mu_k(r+s, t+s)$$

$$\therefore \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial s}\left\{ n_{ij}(r, t \mid s) \exp\left(\int_0^s \mu_j(r+\rho, t+\rho)\, d\rho\right)\right\} = 0$$

これを積分して，$n_{ij}(r, t \mid 0) = \delta_{ij}$ を用いると

(8) $$\sum_{j=1}^{N} n_{ij}(r, t \mid s) \exp\left(\int_0^s \mu_j(r+\rho, t+\rho)\, d\rho\right) = 1 \qquad (1 \leqq i \leqq N)$$

即ち，$N(r, t \mid s)$ には N 個の積分が存在する．特に，死亡力に格差のない場合は
$\mu_i \equiv \mu(r, t)\ (1 \leqq i \leqq N)$ として

(8)′ $$\sum_j n_{ij}(r, t \mid s) = \exp\left(-\int_0^s \mu(r+\rho, t+\rho)\, d\rho\right)$$

この場合は $\boldsymbol{p}(r, t) = (p_1(r, t), \cdots\cdots, p_N(r, t))$ に対して

$$p_j(r+s, t+s) = \sum_i p_i(r, t)\, n_{ij}(r, t \mid s)$$

から

$$\sum_j p_j(r+s, t+s) = \sum_i p_i(r, t) \sum_j n_{ij}(r, t \mid s) = \left(\sum_i p_i(r, t)\right) \exp\left(-\int_0^s \mu(r+\rho, t+\rho)\, d\rho\right)$$

が成り立つから，

(9) $$\sum_j p_j(r, t) = \begin{cases} \sum_j k_j(r-t) \cdot \exp\left(-\int_0^t \mu(a-t+\rho, \rho)\, d\rho\right) & (r \geqq t) \\ \sum_j b_j(t-r) \cdot \exp\left(-\int_0^r \mu(\rho, t-r+\rho)\, d\rho\right) & (r < t) \end{cases}$$

を得る．即ち，死亡力格差がない場合は，システム(1)は１つの積分を有する．従ってその場合，生存状態数 N が２であれば，(1)は常に解析的に解けることになる．これまで死亡力 $\mu_i(r, t)$ の定義域を単に $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+$ としてきたが，r に有限な限界 ω がある場合の方が一般的であろう．即ち，

ωは到達可能な年齢の上限である．このとき一般に μ_i は以下の性質をもつ

(10)
$$\begin{cases} \mu_i(r,\ t) \in C^{+}([0,\ \omega) \times R^{+}) \\ 0 < s < \omega - r \ \text{に対して} \\ \lim_{s \to \omega - r} \exp\left(\int_0^s \mu_i(r+\rho,\ t+\rho)\,d\rho\right) = +\infty,\ (0 \leqq r < \omega) \end{cases}$$

このとき(8)から明らかなように

$$\lim_{s \to \omega - r} n_{ij}(r,\ t \mid s) = 0$$

従って，$s \in [0,\ \omega - r)$ で定義された $N(r,\ t \mid s)$ は $s = \omega - r$ まで延長可能であり，$\boldsymbol{p}(r,\ t)$ は〔0，ω〕上の連続解として決定されることになる．

3．斉一成長解について

ここでは，生成行列 A が時間的に不変であるような Von Foerster 系がもつ著しい性質の1つとして，斉一成長解の存在を示す．まず以下のように定義しておく．

定義1；
$$\frac{1}{p_i(r,\ t)} \frac{\partial}{\partial t} p_i(r,\ t)$$
を状態 i の年齢別成長率（age-specific growth rate）とと呼ぶ．

定義2；Von Foerster 系の解 $p_i(r,\ t)$ の年齢別成長率が，状態及び年齢に依存しない場合，その解を斉一成長解と呼ぶ．

補題Ⅱ－1　斉一成長解においては，各状態における人口の年齢構成は時間的に不変にとどまる．

証明：斉一成長解を $p_i(r,\ t)$（$1 \leqq i \leqq N$）とすると，定義から次式がなりたつ．

$$\frac{1}{p_i(0,\ t)} \frac{\partial}{\partial t} p_i(0,\ t) = \frac{1}{p_i(r,\ t)} \frac{\partial}{\partial t} p_i(r,\ t)$$

従ってこのとき，

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_i(r,\ t)}{p_i(0,\ t)} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq N) \quad \text{であり，}$$

$$\therefore \quad \frac{p_i(r,\ t)}{p_i(0,\ t)} \equiv q_i(r) = \text{時間的に不変}$$

これは，各状態 i の年齢構成が時間的に不変であることを示している．このとき年齢構成係数 $C_i(r)$ は，

$$C_i(r) \frac{q_i(r)}{\int_0^\infty q_i(r)\,dr}$$

となる（証明おわり）

以上の定義の下で以下の定理がなりたつ．

定理Ⅱ－2　生成行列 A が時間に依存しない Von Foerster 方程式（基礎方程式）

$$D\boldsymbol{p}(r,\ t) = \boldsymbol{p}(r,\ t) A(r)$$

は，斉一成長解をその特殊解としてもつ．そのとき斉一成長解 $\boldsymbol{p}(r,\ t)$ は次の形に限る．

$$\boldsymbol{p}(r,\ t) = \boldsymbol{p}_0 e^{s(t-r)} N(r)$$

但し，ここで $\boldsymbol{p}_0$ は $\boldsymbol{p}(0, 0)$ を示す定数ベクトルであり，$s\in\boldsymbol{R}$ は斉一成長率，N（r）は一般化された生残率函数（行列）であり，初期値問題， $N'(r)=N(r)A(r)$，$N(0)=I$ の解に他ならない．

この定理の証明に入る前に，N（r）の意味を明らかにしておこう．前節の(5)式から明らかな如く，A が t に独立な場合は，N（r, t | s）も t に無関係になる．それを N（r | s）と書いて，さらに $r=0$ の場合に，N（0 | s）を単に N（s）と書くことにすると，明らかに N（s）は次式をみたす．

(1)
$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}N(s)=N(s)A(s)\\ N(0)=I\end{cases}$$

このとき N（s）の各行ベクトルは考えている区間〔0， ω〕（$\omega\leqq+\infty$）の上で一次独立である[6]．従って，det N（s）$\neq 0$ であり $N^{-1}(s)$ が存在する．

一方，合成法則から $N(0|s_1)N(s_1|s_2)=N(0|s_1+s_2)$ であるから

$$N(s_1|s_2)=N^{-1}(0|s_1)N(0|s_1+s_2)=N^{-1}(s_1)N(s_1+s_2)$$

即ち，任意の推移率行列は全て，N（s）とその逆によって表現できる．この N（s）を一般化された生残率函数（行列）と呼ぶ理由は明白であろう．そこで以下で定理Ⅱ－2の証明に進もう．

証明（定理Ⅱ－2）補題から明らかの如く，斉一成長解 $p_i(r, t)$（$1\leqq i\leqq N$）が存在するとすれば， $p_i(r, t)=p_i(0, t)\,q_i(r)$ と書ける必要があった．一方，成長率が状態間で同一であるという要請から，任意の $i\neq j$ で

$$\frac{1}{p_i(r, t)}\frac{\partial}{\partial t}p_i(r, t)=\frac{1}{p_j(r, t)}\frac{\partial}{\partial t}p_j(r, t)$$

が成立せねばならない．従って任意の $i\neq j$ で

$$\frac{p_i'(0, t)}{p_i(0, t)}=\frac{p_j'(0, t)}{p_j(0, t)}$$

となる必要がある．従って状態 i によらない函数 r（t）が存在して，任意の i で

$$p_i'(0, t)=r(t)\,p_i(0, t), \qquad (1\leqq i\leqq N)$$

と書けるはずである．これにより，

$$p_i(0, t)=p_i(0, 0)\ \exp\left(\int_0^t r(\rho)\,d\rho\right)$$

そこで $b(t)\equiv\exp(\int_0^t r(\rho)\,d\rho)$ とおけば，求める解の形は，c_i を定数係数として，

$$p_i(r, t)=c_i\,b(t)\,q_i(r)$$

という形でなければならないことがわかる．これを Von Foerster 方程式に投入して，変数分離を実行すれば

$$\frac{b'(t)}{b(t)}=-\frac{q_i'(r)}{q_i(r)}+\sum_j\frac{c_j\,q_j(r)}{c_i\,q_i(r)}\,a_{ji}(r)$$

を得る．ここで左辺は t のみ，右辺は r のみの函数だから，恒等的に上式が成り立つためには，両辺とも定数である必要がある．この定数（分離定数）を s とすれば，$b'(t)=sb(t)$ であり，$b(t)=b(0)\,e^{st}$ 即ち，$r(t)=s$ となる．一方，$q_i(r)$ に対しては

6）山本，前掲書（注5），p.64以下参照．これはN（s）が同次微分方程式系 $n(r)=n'(r)A(r)$ の「推移行列」であることによる．

$$c_i q_i'(r)=\sum_j c_j q_j(r)\,a_{ji}(r)-sc_i\,q_i(r)$$

となるから，ベクトル $\boldsymbol{q}(r)$ を $\boldsymbol{q}(r)=(c_1q_1(r),\ \cdots\cdots,\ c_Nq_N(r))$ と定義しておけば，

$$\frac{d}{dr}\boldsymbol{q}(r)=\boldsymbol{q}(r)\ (A(r)-sI)$$

と書ける．この微分方程式系の推移行列は $e^{-sr}N(r)$ となることは容易に確かめられる．従ってその解は $\boldsymbol{q}(r)=\boldsymbol{q}(0)\,e^{-sr}N(r)$ となる．以上を総合すると，斉一成長解は，

$$\boldsymbol{p}(r,\ t)=\boldsymbol{p}(0,0)\ e^{s(t-r)}N(r)$$

という形に限られることがわかる．これが実際，Von Foerster 方程式をみたすことは明らかであろう（証明おわり）

斉一成長解においては $\boldsymbol{p}(r,t)=e^{st}\,\boldsymbol{p}(r,0)$ であるから，初期分布 $\boldsymbol{p}(r,0)$ が全くその形をかえずに，その規模だけが成長率 s で拡大する[7]．ただここで注意すべきは，求められた解は，単なる Von Foerster 方程式の特殊解であって，それが実現されるかどうかは，初期条件や境界条件に依存していることである．厳密に言うならば，斉一成長解 $\boldsymbol{p}(0,0)\,e^{s(t-r)}N(r)$ は，次の Von Foerster システムの解である．

$$\begin{cases} D\boldsymbol{p}(r,\ t)=\boldsymbol{p}(r,\ t)\,A(r) \\ \boldsymbol{p}(0,\ t)=\boldsymbol{p}(0,\ 0)\ e^{st} \\ \boldsymbol{p}(r,\ 0)=\boldsymbol{p}(0,\ 0)\ e^{-sr}N(r) \end{cases}$$

ここまでの考際では，再生産の構造（次節参照）が導入されていなかったから，境界条件は，単に外生的に与えられるものであるにすぎない．従って例えば単に初期条件として $\boldsymbol{p}_0\,e^{-sr}N(r)$ を与えただけでは斉一成長は保証されない．実にこの点において，出生率函数の導入というロトカの創見の重大な意義が明らかとなる．彼がおこなったことは結局，境界条件 $\boldsymbol{p}(0,\ t)$ が内生的に決定されるような関係式を導入することで，初期値境界値問題を初期値問題へと転換することであった．そのような転換によってはじめて，我々は所与の初期分布のみから出発して，それ以後の人口成長過程を記述することが可能となったのである．その意味で，2節以下で扱ったモデルは，経済学者サムエルソン[8]が，古典的数理人口モデルにおいて「Sharpe and Lotka[9] 以前的」と評した所の Euler から Bortkiewicz に至る諸モデルの多次元の場合に相当するとも言えよう．

4. 再生産構造の導入

前節まで見てきたように，$R^+\times R^+$ 上の偏微分方程式系として Von Foerster 系を解く際には初期条件 $\boldsymbol{p}(r,0)$ と共に，境界条件 $\boldsymbol{p}(0,\ t)$ を与える必要があった．そしてこれまでは，$\boldsymbol{p}(0,\ t)$ は，単に外生的に与えられた函数 $\boldsymbol{b}(t)$ に等しいと考えてきたが，一般にこの単位時間当たりの出生児数を示す函数は，特定の再生産構造によって，$\boldsymbol{p}(r,\ t)$ と結びつけられているはず

7) そこで，以下ではこの $\boldsymbol{p}(r,o)$ を「不変分布ベクトル」とも呼ぶことがある．

8) P. A. Samuelson, "Resolving a Historical Confusion in Population Analysis", *Human Biology*, 48, 1976, pp.559−580.

9) Sharp. F. R., and Lotka, A. J, " A Problem in Age-Distribution " *Philosophical Magazine* 21, 1911, pp.435−438.

である．その関係を $\boldsymbol{p}(0, t)=\boldsymbol{b}(t)=F[\boldsymbol{p}(r, t)]$ とおこう．F は一つの汎函数であって，考えている人口集団のもつ再生産構造によって，様々な形態をとりうる．そのような関係の導入によって Von Foerster 系は以下のような形態をとる．

$$
(1) \qquad \begin{cases} D\dot{\boldsymbol{p}}(r, t)=\boldsymbol{p}(r, t)A(r, t) \\ \boldsymbol{p}(0, t)=F[\boldsymbol{p}(r, t)] \\ \boldsymbol{p}(r, 0)=\boldsymbol{k}(r) \end{cases}
$$

これは一つの初期値問題を構成するから，ひとたび初期条件が与えられれば，それ以後の成長過程は決定される．このような系を自己再生産系とも呼ぶ．以下では，F が線型汎函数となるような典型的な例をあげておくこととしたい．

例 1：出生率函数を用いる場合

一般に $p_i(0, t)=b_i(t)$ は状態 i，時刻 t において，単位時間当たりに生まれる新生児の総数を示している．そこで，$m_i(r, t)$ を t 時刻において r 歳である 1 人の i 状態人口が生む子供の平均値であるとすれば，以下の式がなりたつ．

$$
b_i(t)=\int_0^\infty p_i(r, t)\, m_i(r, t)\, dr
$$

一般に，$m_i(r, t)\in C^+(\boldsymbol{R}^+\times \boldsymbol{R}^+)$ であると仮定され，しかも，ある正の数の組 $0<\alpha_i<\beta_i<+\infty$ が存在して，$r\notin[\alpha_i, \beta_i]$ について $m_i(r, t)=0$ が成り立っている．即ち，$[\alpha_i, \beta_i]$ は i 状態人口の再生産（出産）期間である．さて，このような函数が各状態に与えられている場合，次のような 2 つのケースが考えられる．

i）　状態 i の親から生まれた新生児が，やはり親と同一の状態 i に帰属する場合，このような場合の具体例としては，i が離散的空間変数（即ち地域）を表わしている場合がある．これは第Ⅲ章で具体的に検討する多地域人口成長モデルにおいて出現する構造である．この場合は，出生率行列 M を

$$
M(r, t)=\begin{pmatrix} m_1(r, t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N(r, t) \end{pmatrix}
$$

という対角行列とすれば，

$$
\boldsymbol{p}(0, t)=\boldsymbol{b}(t)=\int_0^\infty \boldsymbol{p}(r, t)M(r, t)\, dr=F[\boldsymbol{p}(r, t)]
$$

と書ける．ここで，積分限界は，M の性質から，事実上有限となることに注意しておく．

ii）　各状態の親から生まれた新生児は，必ずしも親と同一の状態には帰属せず，ある特定の状態に帰属する場合，これは，$N=2$ の場合（いわゆる 3 一状態動学）においてしばしばおこる[10)]．例えば $i=1$ を非就業状態，$i=2$ を就業状態とした労働力モデルにおいては，新生児は全て状態 1 に属するから，

10) Willekens. F. J, "Multistate Analysis : tables of working life", *Environment and Planning* A, Vol.12, 1980, pp.563−588.

$$\begin{cases} p_1(0,\ t)=\int_0^\infty p_1(r,\ t)\,m_1(r,\ t)\,dr+\int_0^\infty p_2(r,\ t)\,m_2(r,\ t)\,dr \\ p_2(0,\ t)=0 \end{cases}$$

なる F の表現を得る．一般に，　$\boldsymbol{m}(r,\ t)=(m_1(r,\ t),\ \cdots\cdots,\ m_N(r,\ t))$　を，出生率ベクトルとして定義すれば，新生児は全て状態1に帰属するとき，

$$\begin{cases} p_1(0,\ t)=\int_0^\infty <\boldsymbol{p}(r,\ t),\boldsymbol{m}(r,\ t)>dr \\ p_i(0,\ t)=0 \qquad (2\leq i\leq N) \end{cases}$$

ここで<>はベクトルの内積を表わす．

例2：出生力函数を用いる場合

ここでは，各状態 i が，$(i-1)$ 回の出産を経験した女性人口からなるというモデル（パリティモデル）を考えよう．但しこの場合一人の女性は，$(N-1)$ 回より多くの出産をすることはないものと仮定しておく．この場合，状態間遷移は一方向的に発生する．即ち，$i\to j\ (i\leqq j)$ という遷移は可能だが，$j\to i\ (i<j)$ は禁止されている．このとき，Von Foerster 系の生成行列 A は上半三角行列となり，解析的に解を求めることができることに注意しておく．さて，このとき明らかに，状態間遷移の発生は，新生児の出産と解釈される．さらに前例 ii）と同様，新生児は状態1に全て帰属するから，F の表現は，

$$\begin{cases} p_1(0,\ t)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-i}\int_0^\infty k\cdot p_i(r,\ t)\,a_{i\,i+k}(r,\ t)\,dr \\ p_i(0,\ t)=0 \qquad (2\leq i\leq N) \end{cases}$$

特に多重出生を無視し得る場合には，第一の式はずっと単純化されて，

$$p_1(0,\ t)=\sum_{i=1}^{N-1}\int_0^\infty p_i(r,\ t)\,a_{i\,i+1}(r,\ t)\,dr$$

となる．ここでは，$a_{ij}(r,\ t)$ という状態間推移の強度を示す函数がそのまま出生の発生強度を表わす函数として機能している．このような函数を，出生力函数とよんで，先の例の出生率函数とは区別しておくことが必要である．出生力函数は死亡力函数と同類であることに注意しておこう．但し，このような出生過程のモデル化においては，これまで前提としてきた状態間遷移のマルコフ性という仮定は，モデルに要求される精度からすれば，採用しがたいものであるとも言えよう．しかし，モデルとしての単純性や扱いやすさという点ではすぐれているから，現象への第一次的接近としては，なお検討に値すると思われる[11]．

Ⅲ　多地域人口成長モデル

1．解の存在定理

前章の最終節例1—i）で導入した境界条件によって，我々は地域間人口移動がマルコフ的である

11）パリティモデルについては以下を参照．

Fjalar Finnäs, " A Method to Estimate Demograhic Intensities via Cumulative Incidence Rates", *Theoretical Population Biology*, 17, 1980, pp.365−379.

ような多地域人口成長モデルとして，以下の Von Foerster 系を得る[12]．

(1)
$$\begin{cases} D\boldsymbol{p}(r,\ t)=\boldsymbol{p}(r,\ t)\,A(r,\ t) \\ \boldsymbol{p}(0,\ t)=\int_0^\infty \boldsymbol{p}(r,\ t)\,M(r,\ t)\,dr \\ \boldsymbol{p}(r,\ 0)=\boldsymbol{k}(r) \end{cases}$$

本節ではこのモデル（一般化された Le Bras-Rogers モデル；略して GLR モデル）の解の存在問題を検討しよう．解 $\boldsymbol{p}(r,\ t)$ は $\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+$ 上の連続函数として求めることとして，共立性の条件

(2)
$$\boldsymbol{k}(0)=\int_0^\infty \boldsymbol{k}(r)\,M(r,\ 0)\,dr$$

を仮定しておく．新生児の出生率（単位時間あたりの出生児数）を示すベクトル値函数を $\boldsymbol{b}(t)$ としておけば，$\boldsymbol{b}(t)\equiv\boldsymbol{p}(0,\ t)$ である．前章2節の結果から次式を得る．

(3)
$$\boldsymbol{p}(r,\ t)=\begin{cases} \boldsymbol{k}(r-t)N(r-t,\ 0|t), & (r\geqq t) \\ \boldsymbol{b}(t-r)N(0,\ t-r|r), & (r<t) \end{cases}$$

これを(1)の境界条件式に代入すれば，次の積分方程式を得る．

(4)
$$\boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{g}(t)+\int_0^t \boldsymbol{b}(t-r)\,\Psi(r,\ t)\,dr$$

但し，

(5)
$$\begin{cases} \boldsymbol{g}(t)=\int_t^\infty \boldsymbol{k}(r-t)\,N(r-t,\ 0|t)\,M(r,\ t)\,dr \\ \Psi(r,\ t)=N(0,\ t-r|r)\,M(r,\ t) \end{cases}$$

これは Lotka の積分方程式（再生方程式）の多次元の場合であり，かつ積分核が時間に依存している点でより一般的なものである．積分核 $\Psi(r,\ t)$ を純再生産行列（函数）と呼び，その要素を $\psi_{ij}(r,\ t)$ としておく．(4)式が，$0\leqq t<+\infty$ において一意的な非負の連続解を，任意の非負連続な初期分布ベクトル $\boldsymbol{k}(r)$ に対して有することを示せば，(1)の解の存在問題は解かれたことになる．

そこで，最初に $M_m=\sup_{i,r,t} m_i(r,\ t)<+\infty$ と仮定しておけば，$0\leqq\psi_{ij}(r,\ t)\leqq M_m$ となる．

ベクトル値函数の列 $\{\boldsymbol{b}^l(t)\}$ $l=1,2,\cdots\cdots$ を，任意の $T>0$ に対して $[0,\ T]$ 上で以下のように定義する．

(6)
$$\begin{cases} \boldsymbol{b}^0(t)=\boldsymbol{g}(t) \\ \boldsymbol{b}^l(t)=\boldsymbol{g}(t)+\int_0^t \boldsymbol{b}^{l-1}(r)\,\Psi(t-r,\ t)\,dr \end{cases}$$

このとき $\boldsymbol{b}^l(t)$ の第 i 要素 $b_i^l(t)$ に対して

12）ここで，状態 i が「地域 i」を示していることは言うまでもない．

(7)
$$|b_i^l(t)-b_i^{l-1}(t)|\leqq M_m P_0\frac{(M_m N t)^l}{l\,!}\text{, for } {}^{\forall}t\in[0,\,T]$$

但し，ここで $\boldsymbol{k}(r)=(k_1(r),\ \cdots\cdots\cdots,\ k_N(r))$

$$P_0=\sum_i\int_0^\infty k_i(r)\,dr$$

であり，無論 $P_0<+\infty$ なる $\boldsymbol{k}$ のみを初期条件として考える．P_0 は初期時点における総人口を示している．(7)式を示そう．

$l=0$ のとき．

$$b_i^0(t)=g_i(t)=\int_t^\infty\sum_j k_j(r-t)\,n_{ji}(r-t,\,0\,|\,t)\,m_i(r,\,t)\,dr\leqq M_m\int_t^\infty\sum_j k_j(r-t)\,dr\leqq M_m P_0$$

従って $l=1$ において，

$$|b_i^1(t)-b_i^0(t)|\leqq\sum_{j=1}^N\int_0^t|b_j^0(r)|\,|\psi_{ji}(t-r,\,t)|\,dr\leqq M_m N\int_0^t(M_m P_0)\,dr=M_m P_0\cdot M_m N t$$

そこで l まで(7)が成り立つとすれば，$l+1$ で

$$|b_i^{l+1}(t)-b_i^l(t)|\leqq\sum_{j=1}^N\int_0^t|b_j^l(r)-b_j^{l-1}(r)|\,|\psi_{ji}(t-r,\,t)|\,dr\leqq M_m\sum_j\int_0^t\frac{(M_m N t)^l}{l\,!}\cdot M_m P_0\,dr$$

$$=M_m P_0\frac{(M_m N t)^{l+1}}{(l+1)\,!}$$

よって帰納法により(7)の成立がわかった．(7)から，区間〔0，T〕で一様に，

(7)′
$$|b_i^l(t)-b_i^{l-1}(t)|\leqq M_m P_0\frac{(M_m N T)^l}{l\,!}$$

となることがわかる．従って，

$$|b_i^l(t)|\leqq|b_i^0(t)|+\sum_{n=1}^l|b_i^n(t)-b_i^{n-1}(t)|\leqq M_m P_0\sum_{n=0}^l\frac{(M_m N T)^n}{n\,!}$$

即ち級数　$b_i^0(t)+\sum_{n=1}^l(b_i^n(t)-b_i^{n-1}(t))\equiv b_i^l(t)$ は，〔0，T〕上で収束する優級数

$$M_m P_0\sum_{n=0}^l\frac{(M_m N T)^n}{n\,!}$$

をもつから〔0，T〕で一様かつ絶対に収束する．その極限を $b_i(t)$ とおけば　$b_i^l(t)\geqq 0$　は明らかだから $b_i(t)$ は非負の連続函数である．　$\boldsymbol{b}(t)=(b_i(t),\cdots\cdots,\ b_N(t))$　とおけば

$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{b}^l(t)=\boldsymbol{b}(t)$　であり，収束は〔0，T〕上一様であったから(6)式において，$l\to\infty$ として

(8)
$$\boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{g}(t)+\int_0^t\boldsymbol{b}(r)\,\Psi(t-r,\,t)\,dr$$

を得る．即ち $\boldsymbol{b}(t)$ は求める(4)式の非負連続解にほかならない，又，証明の過程から明らかなように

$$b_i(t)\leqq\lim_{l\to\infty}M_m P_0\sum_{n=0}^l\frac{(M_m N T)^n}{n\,!}=M_m P_0\,e^{M_m N T}$$

がなりたつ．

次に解の一意性を示そう．そのためには(4)の同次方程式

(4)′
$$\boldsymbol{b}(t)=\int_0^t \boldsymbol{b}(r)\Psi(t-r,\ t)\,dr$$

が $\boldsymbol{b}(t)\equiv 0$ 以外に解をもたないことを示せばよい．各成分にわければ，(4)′の解 $b_i(t)$ は，

$$b_i(t)\leqq M_m\int_0^t \sum_j b_j(r)\,dr\leqq M_m N t\cdot\sup_{j,t}|b_j(t)|$$

この評価を再び(4)′に代入すれば

$$b_i(t)\leqq M_m^2 N^2\frac{t^2}{2}\cdot\sup_{i,t}|b_i(t)|$$

これをくり返して

$$b_i(t)\leqq\frac{(M_m N t)^n}{n!}\sup_{i,t}|b_i(t)|,\quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

従って

$$\sup_{i,t}|b_i(t)|\leqq\frac{(M_m N T)^n}{n!}\sup_{i,t}|b_i(t)|$$

そこでもし，$\sup_{i,t}|b_i(t)|\neq 0$ であれば，十分大きな n に対して

$$\frac{(M_m N T)^n}{n!}<1$$

となることと矛盾する．よって $\sup_{i,t}|b_i(t)|=0$ 即ち，$b_i(t)\equiv 0,\ \ t\in[0,T]$ となる．以上の結果を総括して以下の定理を得る．

定理Ⅲ－1　多地域人口成長モデル(1)は，$0\leqq t<\infty$ において一意的な非負連続解を有する．かつ解 $p_i(r,t)$ に対して次の評価がなりたつ．

$$\begin{cases} p_i(0,\ t)=b_i(t)\leqq M_m P_0\, e^{NM_mt} & (1\leqq i\leqq N) \\ p_i(r,\ t)\leqq NM_m P_0\, e^{NM_mt} & (t>r) \end{cases}$$

但し，$P_0=\sum_i\int_0^\infty k_i(r)\,dr<+\infty,\quad M_m=\sup_{i,r,t} m_i(r,\ t)<+\infty$ であるとする．

2.　時間不変の純再生産行列をもつモデル
—Le Bras-Rogers モデル—

この節では，生成行列 A，出生率行列 M が時間的に不変であるような多地域モデル（これを Le Bras-Rogers モデル[13)]；LR モデルと呼ぶ）を考える．このモデルは GLR モデルの

13）このモデルは以下の論稿で初めて扱われた．

Herve Le Bras, " Equilibre et Croissance de Populations Soumises a des Migrations", *Theoretical Population Biology* 2, 1971, pp.100−121.

Andrei Rogers, *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley& Sons, 1975, Chap.4.

特別な場合であるが，次のような著しい特徴をもっている．即ち (1)斉一成長解が唯一つ存在する．(2)有界変動な解は積分表示ができる．この2点を以下で解明しよう．

(1) 斉一成長解の存在

前章3節の議論から，時間不変な生成行列をもつ Von Foerster 系が斉一成長解 $\boldsymbol{p}(r, t)$ をもつ場合には，非負ベクトル $\boldsymbol{p}_0$，実数 s が存在して $\boldsymbol{p}(r, t)=\boldsymbol{p}_0 e^{s(t-r)}N(r)$ という形でかけなければならなかった．LR モデルでは，さらに $M(r)$ によって再生産構造が導入されているから，そのような特殊解が実現されるためには，境界条件

(1) $$\boldsymbol{p}(0, t)=\int_0^\infty \boldsymbol{p}(r, t)M(r)dr$$

がみたされる必要がある．ここに斉一成長解の表現式を代入すれば次式を得る．

(2) $$\begin{cases} \boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}_0\cdot\int_0^\infty e^{-sr}\,\Psi(r)\,dr \\ \Psi(r)=N(r)\,M(r) \end{cases}$$

ここで，

$$\Psi^*(s)\equiv\int_0^\infty e^{-sr}\,\Psi(r)\,dr$$

とおけば

(3) $$\boldsymbol{p}_0(I-\Psi^*(s))=\boldsymbol{0}$$

を得る．即ち，(3)式は，$\boldsymbol{p}_0 e^{s(t-r)}N(r)$ が斉一成長解となる際に，s 及び $\boldsymbol{p}_0$ がみたさねばならない所の必要条件である．逆に(3)をみたす非負ベクトル $\boldsymbol{p}_0$，実数 s に対して $\boldsymbol{p}_0 e^{s(t-r)}N(r)$ が斉一成長解となることも明らかであろう．(3)が非自明な $\boldsymbol{p}_0$，即ち，$\boldsymbol{p}_0\neq\boldsymbol{0}$ なる非負ベクトルを解としてもつためには

(4) $$\det(I-\Psi^*(s))=0$$

が必要である．即ち，成長率 s に対して，$\Psi^*(s)$ は1を固有値としてもつ必要がある．そこで，以下では $f(z)\equiv\det(I-\Psi^*(z))$, $z\in\boldsymbol{C}$ とおいて $f(z)=0$ の根を調べることにする．次の補題を示そう．

補題 III－2 $\Psi^*(s)$ が $\forall s\in\boldsymbol{R}$ に対して常に分解不能な非負行列であるとする．このとき $f(z)=\det(I-\Psi^*(z))=0$ の C 内の根に対して以下が成り立つ．

(i) 一つの実根 s_1 が存在して，しかも $\Psi^*(s_1)$ の Frobenius 根は1となる．又 s_1 は $f(z)=0$ の実根の中で最大のものである．

(ii) ある実数 $s_m\in\boldsymbol{R}$ が存在して，全ての根は $\mathrm{Re}\,z\leqq s_m$ なる半平面内に，実軸に対称な形で分布している．即ち z が根であれば $\bar{z}$ も根である．

証明： 仮定から $s\in\boldsymbol{R}$ に対して $\Psi^*(s)$ は Frobenius 根 $\lambda(s)$[14] >0 を有する．$\Psi^*(s)$ の (i, j) 要素を $\psi^*_{ij}(s)$ $(1\leqq i, j\leqq N)$ とすれば，

$$\psi^*_{ij}(s)=\int_0^\infty e^{-sr}\psi_{ij}(r)\,dr$$

ここで s が$-\infty$から$+\infty$まで動くとき，$\psi^*_{ij}(s)$ は$+\infty$から0まで単調に減少する．実際

14) 以下で用いる Perron-Frobenius の定理及び非負行列の理論については，二階堂副包，『経済のための線型数学』，培風館，第II章参照．

15) 行列における$\geq$は$\geqq$かつ$\neq$を意味している．

$$\frac{d}{ds}\psi^*_{ij}(s)=-\int_0^\infty re^{-sr}\psi_{ij}(r)\,dr\leqq 0$$

ここで，$\frac{d}{ds}\psi^*_{ij}(s)=0$ となるのは $\psi_{ij}(r)\equiv 0$ となる場合に限るが，その際には $\Psi^*(s)$ についての仮定から，$\Psi(s)$ の i 行又は j 行には，恒等的には0でない要素が必ず存在する．それを $\psi_{k,l}(r)$ ($k=i$ 又は $l=j$) とすると $\frac{d}{ds}\psi^*_{k,l}(s)<0$ がなりたつ．故に，

$$s_1<s_2 \Longrightarrow \Psi^*(s_1)\geqq\Psi^*(s_2)$$

従って $\Psi^*(s)$ の Frobenius 根を $\lambda_F(s)$ とおけば

$$s_1<s_2 \Longrightarrow \lambda_F(s_1)>\lambda_F(s_2)$$ [16]

なることが $\psi^*(s)$ の分解不能性から従う．さらに $\min_i\sum_j\psi^*_{ij}(s)\leqq\lambda_F(s)\leqq\max_i\sum_j\psi^*_{ij}(s)$ であるから[17] $\lim_{s\to-\infty}\lambda_F(s)=+\infty$, $\lim_{s\to+\infty}\lambda_F(s)=0$ となることがわかる．
今，$F(\lambda,z)\equiv\det(\lambda I-\Psi^*(z))$ とおくとき，$\lambda_F(s)$ は λ の多項式 $F(\lambda, s)$ の単根であり，s に関して連続である．以上から $\lambda_F(s)$ は連続で狭義単調減少，$\lambda_F(-\infty)=+\infty$, $\lambda_F(+\infty)=0$ となることがわかったから，方程式 $\lambda_F(s)=1$ 唯一つの実根 s_1 をもつ．このとき定義から

$$f(s_1)=\det(I-\Psi^*(s_1))=\det(\lambda_F(s_1)I-\Psi^*(s_1))=F(\lambda_F, s_1)=0$$

即ち，s_1 は $f(z)=0$ の実根である．さてもし $f(z)=0$ に s_1 以外の実根があったとして，それを s_2 とする．このとき $\lambda_F(s)=1$ は，$s_1(\neq s_2)$ を単根としてもっていたから $\lambda_F(s_2)\neq 1$ である．ところが，$\Psi^*(s_2)$ の $\lambda_F(s_2)$ 以外の固有値 $\lambda(s_2)$ に対しては，$|\lambda(s_2)|\leqq\lambda_F(s_2)$ [18] がなりたつ．s_2 は $f(s_2)=0$ をみたすと仮定したから，$F(\lambda, s_2)=0$ は，$\lambda=1$ を根にもち，それは Frobenius 根ではない（$\because$ $\lambda_F(s_2)\neq 1$）それ故，$1<\lambda_F(s_2)$ となる．λ_F の単調減少性から $s_2<s_1$ となる．以上で (i) が示された．
次に (ii) を示そう．ここでは $z\in\boldsymbol{C}$ の範囲で根を考える．$f(z)$ を展開すると，

$$f(z)=\det(I-\Psi^*(z))=\sum_{\sigma=\binom{1,2,\dots,N}{i_1,i_2,\dots,i_N}}\varepsilon(\sigma)x_{1i_1}(z)\,x_{2i_2}(z)\cdots\cdots x_{Ni_N}(z)$$

$$x_{ki_k}(z)=\begin{cases}-\psi^*_{ki_k}(z) & (k\neq i_k)\\ 1-\psi^*_{kk} & (k=i_k)\end{cases}$$

よって

$$f(z)=1-\sum\pm\ (\text{高々 } n \text{ 次の } \psi^*_{kl}(z) \text{ の斉次式})$$

という形をしている．ここで $\psi^*_{kl}(z)$ は $\psi_{kl}(r)$ のラプラス変換像であることに注意しよう．L をラプラス変換を示す作用素とすると

$$L(\psi_{kl}(r))=\psi^*_{kl}(z)$$

$\psi_{kl}(r)$ は有界な台をもっているから $\psi^*_{kl}(z)$ は，常に絶対収束している．よって合成積に関する Borel の定理から，

$$L(\psi_{kl}(r)*\psi_{kl}(r))=\psi_{ij}^*(z)\,\psi_{kl}^*(z)$$

を得る．但し，左辺の＊は合成積を示す演算記号として用いている．従って

$$f(z)=1-L(\sum\pm\ (\text{高々 } n \text{ 重の } \psi_{ij} \text{ の合成積}))$$

16）前掲，二階堂 p.87．

17）前掲，二階堂 p.88．参照

18）二階堂，前掲書，p.74参照

となる．このカッコ内の函数を $\widetilde{\psi}(r)$ とかけば，

$$f(z)=1-L(\widetilde{\psi}(r))=1-\int_0^{\infty}e^{-zr}\widetilde{\psi}(r)\,dr$$

即ち $f(z)=0$ の根 z は，

$$\int^{\infty} e^{-rz}\widetilde{\psi}(r)\,dr=1$$

の根に他ならない．これはいわゆるロトカの特性方程式[19]と同型であるが，一次元の場合とは異なってもはや $\widetilde{\psi}(r)$ は非負とは限らないことに注意しよう．$\widetilde{\psi}(r)$ が非負の場合は根の分布は一次元の場合と全く同様になることは言うまでもない．$\widetilde{\psi}(r)$ は実の連続函数であるから $f(z)=0$ ならば，$\overline{f(z)}=f(\bar{z})=0$ 即ち $\bar{z}$ も根である．さらに z が根であれば，

$$1\leq\int_0^{\infty}e^{-r\cdot Re\,z}|\widetilde{\psi}(r)|dr$$

ここで，

$$h(s)\equiv\int_0^{\infty}e^{-sr}|\widetilde{\psi}(r)|\,dr,\ s\in\boldsymbol{R}$$

は，s が $-\infty$ から $+\infty$ まで動くとき $+\infty$ から 0 へ単調に減少するから $h(s)\geqq 1$ となる s には有限な上限 s_m が存在する．よって全ての根 z に対して $ReZ\leqq s_m$ でなければならない．以上で（ii）が示された（証明おわり）

この補題とその証明過程から次の定理がただちに得られる．

定理　Ⅲ－3　Le Bras-Rogers モデルは，純再生産行列のラプラス像 $\Psi^*(s)$，$s\in\boldsymbol{R}$ が，非負分解不能である場合，唯一つの斉一成長解を有する．その際，斉一成長率は，$f(z)=\det(I-\Psi^*(z))$ の最大実根 s_1 であり，不変分布ベクトルは，$\Psi^*(s_1)$ の Frobenius 根 1 に属する正値固有ベクトル $\boldsymbol{p}_F$ を用いて，$\boldsymbol{p}_F e^{-sr}N(r)$ と表わされる．$\boldsymbol{p}_F$ は定数倍を除いて唯一つである．

証明：　補題の証明過程から $\boldsymbol{p}_F e^{s_1(t-r)}N(r)$ が斉一成長解の一つの候補であることがわかる．ところが s_1 以外の実根 s_2 に対しては，$\Psi^*(s_2)$ の固有値 1 はもはや Frobenius 根ではなかったから，それに属する固有ベクルトは非負ではあり得ない[20]．従って $\boldsymbol{p}_F e^{s_1(t-r)}N(r)$ は唯一つの候補であるが，これが事実，実現されることは LR モデル

$$\begin{cases} D\boldsymbol{p}(r,\ t)=\boldsymbol{p}(r,\ t)A(r) \\ \boldsymbol{p}(0,\ t)=\displaystyle\int_0^{\infty}\boldsymbol{p}(r,\ t)M(r)\,dr \\ \boldsymbol{p}(r,\ 0)=\boldsymbol{p}_F e^{-s_1 r}N(r) \end{cases}$$

に代入してみれば明らかである（証明おわり）

以上によって LR モデルでの斉一成長の可能性の問題が解かれたが，そこでの仮定，即ち，$\Psi^*(s)$，$s\in\boldsymbol{R}$ が分解不能ということの人口学的意味を考えておこう．（非負性は明らかであろう）今，$\Psi^*(s)$ がある一点 $s_0\in\boldsymbol{R}$ で分解可能であれば，添字の集合 $A=\{1,2,\cdots,N\}$ は，空で

19) Nathan Keyfitz, *Introduction to the Mathematics of Population*, Addison-Wesley, 1968, p.100. 参照．

20) 二階堂，前掲書，p.89. 参照．

ない部分集合 B, C が存在して，$A=B\cup C$，$B\cap C=\phi$ と表わされ，　$i\in B,\ j\in C$　ならば，$\psi^*_{ij}(s_0)=0$ が成り立つ．このとき，全ての $r\in \boldsymbol{R}^+$ について $\psi_{ij}(r)\equiv 0,\ i\in B,\ j\in C$ となる．ところがこのときは，全ての $s\in \boldsymbol{R}$ で，$\psi^*_{ij}(s)\equiv 0,\ i\in B,\ j\in C$　となる．即ち，$\Psi^*(s)$ が一点 s_0 で分解可能ならば，全ての $s\in \boldsymbol{R}$ で $\Psi^*(s)$ は分解可能である．従って，全ての $s\in \boldsymbol{R}$ で $\Psi^*(s)$ が分解不可能であるためには，実はある一点 s_0 で分解不可能であれば十分であることになる．さて，ある点 s_0 で $\Psi^*(s_0)$ が分解可能であれば，上記のような添字の部分集合 B，Cがあって，

$$B\in i,\ C\in j \text{ で } \psi_{ij}(r)\equiv 0$$

であった．　$\psi_{ij}(r)=n_{ij}(r)\ m_j(r)$　であるから[21]，$m_j(r)\fallingdotseq 0$ なる r の点で $n_{ij}(r)=0$ となる．即ち，B に属する地域の出身者[22]は，C 地域の再生産年齢の期間には，C 地域へは参入することがない．これまでの仮定とは別に，各人は出身地の出生秩序を一生を通じて保ちつづけるという場合を考えると[23]と，$\psi_{ij}(r)=n_{ij}(r)m_i(r)$　となり，この場合は自己の再生産期間（$m_i(r)\fallingdotseq 0$ となる期間）には，B 出身者は C 類の地域へ参入しないこととなる．よっていずれの場合においても，B 類で生まれた親からは C 類生まれの子供はできないことを意味している．このような場合 C 出身者の集合は，自己の子孫の再生産に関して「閉じている.」即ち C 類地域生まれの者の親は，必ず C 類出身者である．このような自己の再生産に関して閉じた部分系の存在を禁ずるのが，分解不可能性の仮定に他ならない．従って分解不可能な系においては，どの地域の出身者も，その祖先の中に，任意の他地域の出身者を見出すことができる．即ち，全体人口を，各個体の出生地域で分類した部分人口系の集合とみなした場合，各部分人口集団の再生産に関しては，全ての部分人口集団が，相互に，直接的ないし間接的に関与していることになる．

(2) 解の積分表示

ここでは LR モデルにおいて表わされる積分方程式をラプラス変換によって解く可能性について検討しよう．まず GLR モデルにおいて導いた積分方程式（第1節(4)，(5)式）を，Ⅱ章3節で導いた，A が時間不変がある場合の $N(r,\ t\mid s)$ の表現式によって書きなおせば，

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{g}(t)+\int_0^t \boldsymbol{b}(t-r)\,\Psi(r)\,dr \\ \boldsymbol{g}(t)=\int_0^\infty \boldsymbol{k}(r-t)N^{-1}(r-t)N(r)M(r)\,dr \end{cases}$$

以下では，これまで同様ラプラス像には＊を右肩につけて示す．即ち $z\in \boldsymbol{C}$ として

$$\boldsymbol{b}^*(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\boldsymbol{b}(t)\,dt$$

$$\boldsymbol{g}^*(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\boldsymbol{g}(t)\,dt$$

このとき，前節の解の存在定理における $\boldsymbol{b}(t)$ の評価式から，$\boldsymbol{b}^*(z)$ の収束座標は NMm 以下であることがわかる．又，$\boldsymbol{g}(t),\ \Psi(t)$ は共に有界な台をもつからそのラプラス積分は，全ての z で

21) $N(r)=(n_{ij}(r))\ 1\leq i,\ j\leq N$ である．
22) ここでB地域の「出身者」とは，B地域で生まれた者をさす．
23) この場合は，$\Psi(r)=M(r)\ N(r)$ となる．

常に絶対収束している．よって $\mathrm{Re}z > NM_m$ なる z に関して(1)式のラプラス変換をとれば，

(2)
$$\boldsymbol{b}^*(z) = \boldsymbol{g}^*(z) + \boldsymbol{b}^*(z) \cdot \Psi^*(z)$$

となり，従って以下の式を得る．

(2)′
$$\boldsymbol{b}^*(z)\ (I - \Psi^*(z)) = \boldsymbol{g}^*(z)$$

前節の補題から，ある $s_m \in \boldsymbol{R}$ が存在して $\mathrm{Re}z > s_m$ では，$\det(I - \Psi^*(z)) \neq 0$ であることがわかるから，$\mathrm{Re}z > \max(NM_m,\ s_m)$ においては，

(3)
$$\boldsymbol{b}^*(z) = \boldsymbol{g}^*(z)\ (I - \Psi^*(z))^{-1}$$

がなりたつ．さて，以下では解 $\boldsymbol{b}(t)$ としては，連続であるばかりでなく有界変動であることを仮定しよう．これを保証するには $\boldsymbol{b}(t)$ が連続微分可能であれば十分である．そのような解が存在するためには，$A(r), M(r)$，$\boldsymbol{k}(r)$ などが連続微分可能であり，かつ $\boldsymbol{k}(r)$ の微分を含んだ共立性の条件が必要となるが，ここではその詳細には立ち入らないでおく[24]．$\boldsymbol{b}(t)$ が有界変動であれば反転定理がなりたつから，

$\sigma > NM_m$ において

(4)
$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{zt}\ \boldsymbol{b}^*(z)\, dz$$

従って上式に(3)式を代入することで次式を得る．$\sigma > \max(s_m,\ NM_m)$ として

(5)
$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{zt}\ \boldsymbol{g}^*(z)(I - \Psi^*(z))^{-1}\, dz$$

これが求める解の積分表示に他ならない．このような積分表示は，複素平面上でのその挙動を調べることで，$\boldsymbol{b}(t)$ に対する情報を与えてくれる．特に $\boldsymbol{b}(t)$ の $t \to \infty$ での漸近的挙動は，Ⅳ章で導入するエルゴード性の成立の可否を決定する点で極めて本質的な役割をはたすものである[25]．しかしながら現在まで，多次元の積分表示(6)の漸近的挙動を調べるという課題は果されていない．

Ⅳ　人口成長過程のエルゴード性

1．函数空間の写像としての人口成長過程

一般に，これまでみてきたように，多次元の人口成長過程の各時点 t における系の状態は，ベクトル値函数 $\boldsymbol{p}(r, t) = (p_1(r, t),\ \cdots\cdots,\ p_N(r, t))$ によって表現された．ここで t をパラメータとみれば，r の函数として $p_i(r, t) \in C^+[0, \omega]$（$\omega$ は年齢の上限）である．そこで，

$$\Omega = \{\boldsymbol{f} = (f_1(r),\ \cdots\cdots,\ f_N(r));\ f_i(r) \in C^+[0, \omega]\}$$

とおいて，Ω を人口成長過程の「状態空間」と呼ぶ．Ω は線型空間 $C_N[0, \omega]$ [26] の部分集合であ

24）これらの点については例えば Gurtin & MacCamy，前掲論文を参照．

25）これを一次元の場合に調べたものとして以下がある．

Willy Feller, "On the Integral Equation of Renewal Theory", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol.12, 1941, pp.243－267

Alvaro Lopez, *Problems in Stable Population Theory*, Office of Population Research, Princetion, N. J., 1961, Chap Ⅰ

26）$C_N[o,\ \omega] = C[o,\ \omega] \times \cdots\cdots \times C[o,\ \omega]$（N個の直積）

り，線型ではないが凸錐[27]をなす．今，一つの多次元人口モデルが，初期条件　$\boldsymbol{u}\in\Omega$　に対して一意的な解 $\boldsymbol{p}(r, t)$（$t\geqq 0$）をもち，$\boldsymbol{p}(r, t)$ は，r の函数として Ω に属する場合，Ω 上の時間 t（$\geqq 0$）をパラメータとする写像 U_t を

$$
\begin{array}{rcl}
U_t : \boldsymbol{u} & \longrightarrow & \boldsymbol{p}(\cdot, t) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\Omega & \longrightarrow & \Omega
\end{array}
$$

として定義しよう．但し，$U_0 = I$（恒等写像）としておく．写像の集合　$\{U_t, t>0\}$　は，考えている人口成長過程を完全に表現しているから，これ自体を人口成長過程，ないしは単に人口過程と呼ぶ．又，Ω の部分集合 $\{U_t(\boldsymbol{u}); \boldsymbol{u}\in\Omega, t\geqq 0\}$ を，u を初期条件とする人口過程 U_t の「軌動」と呼ぶ．特に，ある　$\lambda(t)\in C^+[0, \infty)$ が存在して $(U_t\cdot\boldsymbol{f})(r) = \lambda(t)\ \boldsymbol{f}(r)$ となる場合，軌動 $\{U_t\cdot\boldsymbol{f}, t>0\}=\{\lambda(t)\boldsymbol{f}(r), t>0\}$ を「斉一成長軌動」と呼ぶ．斉一成長軌動は，明らかに一つの分布ベクトル $\boldsymbol{f}$ の正定数倍のみからなる集合である．このとき $\boldsymbol{f}$ を不変分布（ベクトル）と呼ぶ．これらの定義が，前章での斉一成長解に対応していることは言うまでもない．Ω の要素 $\boldsymbol{f}$ に対してはそのノルム $\|\boldsymbol{f}\|$ を，

$$\|\boldsymbol{f}\|=\sum_i\int_0^{\omega}|f_i(r)|dr$$

として定義する．さらに部分集合 $S\subset\Omega$ を

$$S=\{\boldsymbol{f}; \boldsymbol{f}\in\Omega, \|\boldsymbol{f}\|=1\}$$

とする．$\|\boldsymbol{f}\|$ は明らかに，状態 $\boldsymbol{f}$ の総人口に他ならない．$\Omega-\{0\}$　から S への写像 T を，

$$
\begin{array}{rcl}
T : \boldsymbol{f} & \longmapsto & \dfrac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\Omega-\{0\} & \longrightarrow & S
\end{array}
$$

によって定義すると T は総人口を1に規格化する作用に他ならないから，$T\cdot\boldsymbol{f}$ は，状態 $\boldsymbol{f}$ での人口の分布構造を代表する函数とみなせる．さて以下では写像 U_t に対して線型性，

(1)
$$
\begin{gathered}
\alpha, \beta, t\in\boldsymbol{R}^+, \forall\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\Omega \\
U_t(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u})=\alpha U_t(\boldsymbol{u})+\beta U_t(\boldsymbol{u})
\end{gathered}
$$

が成り立つもののみを考える．(1)式から，$U_t(0)=0$ となるから，この仮定に従う人口過程では，一度全人口が死滅するとそれ以後人口は0にとどまる．即ちこの人口は，閉鎖的で，外部からの移民が存在しない[28]．さて，今，

$$\mathrm{Ker}\,U_t=\{f; f\in\Omega, U_t(f)=0\}$$

と定義すれば，Ker U_t は凸錐であり，$t_1<t_2$ で　$\mathrm{Ker}\,U_{t_1}\subseteqq\mathrm{Ker}\,U_{t_2}$　となる．そこで $K=\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ker}\,U_t$　とすれば，K も凸錐であって

$$K=\{\boldsymbol{f}; \boldsymbol{f}\in\Omega, {}^{\exists}t\in\boldsymbol{R}^+ \text{ で } \boldsymbol{f}\in\mathrm{Ker}\,U_t\}$$

このとき　$\boldsymbol{u}\in\Omega-K$　について，$U_t(\boldsymbol{u})\in\Omega-\{0\}$　が全ての $t\geqq 0$ でなりたつ．それ故 $\Omega-K\ni\boldsymbol{u}$ に対しては，合成写像 $T\cdot U_t$ が定義される．即ち

$$
\begin{array}{rcl}
T\cdot U_t : \boldsymbol{u} & \longrightarrow & \dfrac{U_t(\boldsymbol{u})}{\|U_t(\boldsymbol{u})\|} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\Omega-K & \longrightarrow & S
\end{array}
$$

27）${}^{\forall}\alpha, \beta\in\boldsymbol{R}^+, {}^{\forall}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\Omega$　に対して $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}\in\Omega$ となることを言う．

28）このことは，基礎方程式が，同次線型であることを意味している．

$\Omega-K$ から出発する人口過程は，決して死滅することがない．逆に，K から出発する過程は，いずれは死滅することになる．そこで，$\boldsymbol{u}\in\Omega-K$ に対して，それを初期条件とする軌動 $\{U_t(\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}$ を，T によって S 上に写すことで，S 上の軌動 $\{T\cdot U_t(\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}$ が定義できる．このとき，$\boldsymbol{u}\in\Omega-K$ に対して $^\forall\alpha>0$ をとれば，$\alpha\boldsymbol{u}\in\Omega-K$ であり，かつ，$T\cdot U_t(\alpha\boldsymbol{u})=T(\alpha U_t(\boldsymbol{u}))=T\cdot U_t(\boldsymbol{u})$ がなりたつ．よって軌動 $\{U_t(\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}$ の正の定数倍の軌動 $\{\alpha U_t(\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}=\{U_t(\alpha\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}$ は全て T によって S 上の同一の軌動 $\{T\cdot U_t(\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}$ に写される．$\Omega-K$ 上の写像 $T\cdot U_t$ の $S\cap(\Omega-K)$ 上への制限を $\widetilde{U}_t$ とすれば，

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{U}_t:\boldsymbol{x} & \longrightarrow & T\cdot U_t(\boldsymbol{x})=\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x})\\ \Cap & & \Cap\\ S\cap(\Omega-K) & \longrightarrow & S\cap(\Omega-K)\end{array}$$

$\widetilde{U}_t$ を用いると，$\boldsymbol{u}\in\Omega-K$ に対する軌動 $\{U_t(\boldsymbol{u}),\ t\geqq 0\}$ の T による S 上への写像 $\{T\cdot U_t(\boldsymbol{u}),\ t>0\}$ は，S 上の $\widetilde{U}_t$ による $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ を初期条件とする軌動 $\{\widetilde{U}_t(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}),\ t\geqq 0\}$ に他ならないことがわかる．実際

$$\widetilde{U}_t\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)=T\cdot U_t\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)=T\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}U_t(\boldsymbol{u})\right)=T\cdot U_t(\boldsymbol{u})$$

となるからである．そこで $\Omega-K$ から出発する人口過程 U_t の軌動（死滅しない人口成長）は，T によって $S\cap(\Omega-K)$ へ写すことで $\widetilde{U}_t$ による S 上の軌動として考察することが可能である．このような操作によって我々は，人口過程の量的側面を捨象して，分布構造の変動特性のみをつかみ出すことができるようになるのである．

2．斉一成長軌動とエルゴード性

写像 $\widetilde{U}_t$ について，ある $\boldsymbol{x}\in S\cap(\Omega-K)$ が存在して，任意の $t\geqq 0$ に対して，$\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ となるとき，x を $\widetilde{U}_t$ の不動点という．このとき，

定理　Ⅳ－1　人口過程 U_t が Ω で，斉一成長軌動をもてば，$\widetilde{U}_t$ は不動点をもつ．逆もなりたつ．

証明：斉一成長軌動を $\{U_t(\boldsymbol{f}),\ t\geqq 0\}=\{\lambda(t)\boldsymbol{f}(r),\ t\geqq 0\}$ とおけば，その T による像は，一点

$$\left\{\frac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|}\right\}$$

からなる集合である．明らかに定義から，

$$\widetilde{U}_t\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|}\right)=\frac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|}$$

が全ての t で成り立つ．即ち，$\dfrac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|}$ が $\widetilde{U}_t$ の不動点である．逆に，$\widetilde{U}_t$ が不動点 $\boldsymbol{x}$ をもつと仮定すれば，

$$\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x})=TU_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}=\frac{U_t(\boldsymbol{x})}{\|U_t(\boldsymbol{x})\|}$$

だから，$U_t(\boldsymbol{x})=\|U_t(\boldsymbol{x})\|\cdot\boldsymbol{x}$ である．$\|U_t(\boldsymbol{x})\|$ は，R^+ に値をもつ t の函数だから $\{U_t(\boldsymbol{x}),\ t\geqq 0\}$ は，Ω の斉一成長軌動であることがわかる（証明おわり）

S 上に距離 $\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in S$ を，例えば，

$$\rho(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=\sum_i\int_0^{\omega}|u_i(r)-v_i(r)|dr$$

によって定義できる．一般に，S 上の距離 ρ に対して，以下の定義を設ける．

定義　1　　$^\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in S\cap(\Omega-K)$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\ \widetilde{U}_t(\boldsymbol{v}))=0$$

がなりたつとき，人口過程 $\{U_t,\ t\geqq 0\}$ は，弱エルゴード的であるという．

定義　2　U_t が不動点 $\boldsymbol{x}\in S\cap(\Omega-K)$ をもっていて，$^\forall \boldsymbol{u}\in S\cap(\Omega-K)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{x})=0$$

となるとき，$\{U_t,\ t\geqq 0\}$ は，強エルゴード的であるという．このとき $\boldsymbol{x}$ をとくに安定人口分布と呼ぶ．

このとき次の定理がただちに導かれる．

定理　Ⅳ－2　人口過程 $\{U_t,\ t\geqq 0\}$ が，

(1)　強エルゴード的であれば，弱エルゴード的でもある．

(2)　強エルゴード的であれば，$\widetilde{U}_t$ の不動点は唯一つ存在する．

(3)　弱エルゴード的であり，かつ $\widetilde{U}_t$ が不動点をもてば，強エルゴード的である．

証明：(1)不動点を $\boldsymbol{x}$ とすると，$\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ であり，$^\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in S\cap(\Omega-K)$ に対して仮定から，ら，

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x}))=\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{x})=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{v}),\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x}))=\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{x})=0$$

一方，三角不等式から

$$\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\widetilde{U}_t(\boldsymbol{v}))\leqq\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{x})+\rho(\boldsymbol{x},\widetilde{U}_t(\boldsymbol{v}))$$

よって $t\to\infty$ として　$\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\widetilde{U}_t(\boldsymbol{v}))\to 0$

(2)　2つの不動点があれば，それを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とすると，

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x}),\widetilde{U}_t(\boldsymbol{y}))=\lim_{t\to\infty}\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$$

即ち，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ でなければならない．

(3)　$\boldsymbol{x}$ を不動点とすると，$\forall \boldsymbol{u}\in S\cap(\Omega-K)$ に対して，仮定から $t\to\infty$ で，

$$\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{x})=\rho(\widetilde{U}_t(\boldsymbol{u}),\widetilde{U}_t(\boldsymbol{x}))\to 0$$

よって $\widetilde{U}_t$ は強エルゴード的である（証明おわり）

Lotka[29] にはじまり，Feller[30]，Lopez[31]，によって一応の完成をみた古典的な安定人口理論の核心は，これらの定義によれば，一次元の LR モデルが強エルゴード的であるという定理にほかならない．さらにその後，一次元の GLR モデルに対して弱エルゴード性が，ある条件の下で成り立つことを Lopez が示した[32]．多次元モデルにおいてはエルゴード性はなりたつだろう

29）注 9）参照．

30）注25）参照．

31）注25）参照．

32）Alvaro Lopez, "Asympotic Properties of a Human Age Distrilution under a Continuous Net Maternity Function", *Demography* 4, 1967, pp.680－687

か？ Le Bras（1971）[33]，Rogers（1975）[34]は，多次元の LR モデルが，強エルゴード的であると主張している．さらに Le Bras（1977）[35]は，GLR モデルで弱エルゴード性が成り立つと考えている．しかし筆者のみるところ，彼らの主張は，必ずしも十分に証明されているとは言い難く，いまだ予測にとどまっているように思える．しかし，前章で示したように，LR モデルには斉一成長解が存在したから，$\widetilde{U}_t$ は不動点をもっている．それ故，Le Bras が主張するように，GLR モデルが弱エルゴード的であれば，LR モデルは必然的に強エルゴード的なることが定理Ⅳ－2からわかる．

最後に，エルゴード性のもつ人口学的な意味を考えておこう．弱エルゴード的な過程においては，人口の年齢間，状態間の分布構造に及ぼす初期条件の影響は，十分な時間がたてば，任意に小さくなると期待される．従ってある任意の時点 t_0 で観測された人口の分布構造は，観測時点に先立つある有限の期間 T における人口過程　$\{U_t,\ t_0-T \leqq t \leqq t_0\}$　によって事実上「ほとんど」決定されていて，t_0-T 以前の分布構造の影響は，無視できる程小さいことになる．従って弱エルゴード的人口過程においては，分布構造に関する限り，その原因を求めて，無限の過去を捜しまわる必要はないのである．Joel. E. Cohen は，この事実をもって，「弱エルゴード定理は年齢構造の科学を可能にする」と言っている[36]．さらに，強エルゴード的な過程においては，どのような分布構造から出発しても，最終的に安定分布に収束し，その成長率は一定となるから，そのような過程において本質的な分布と考えられるのは安定分布だけであり，他の分布は過渡的なものでしかない．従ってその場合，斉一成長下の人口構造の分析が，中心的な意義をもつことになろう．安定人口理論は，このような過程の特性を利用したものに他ならない．

Ⅴ 結　　論

今日，年齢構造をもつ人口の数学的モデルの展開をみるならば，離散モデルに対して，ここで述べたような連続型のモデルの方が，早くから研究されてきたにもかかわらず，理論的発達が遅れていると感ずるのは，筆者のみではないのではなかろうか？　その理由の最大のものは，はじめに述べたような「二分法」的発想に伴う微分方程式アプローチの不在ということであっただろうが，そのことの背後には次のような事態が伏在している．離散モデルにおいては，年齢分布は連続函数ではなくて，有限次元のベクトルで表わされる．その時，Ω は有限次元のベクトル空間の凸錐に他ならない．従ってその上の線型写像 U_t は行列表現をもつ．特に再生産と死亡の秩序が時間的に不変な場合は，一つの行列（レスリー行列）A をとって，$U_n(\boldsymbol{u})=A^n\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}\in\Omega$　とあらわされる[37]．よってこのような場合には，Perron-Frobenius の定理を中心として開発された強力な非負行列の理論や，スペクトル分解定理を利用することができることになる．ところで，もしも連続理論においても，離散理論と平行的に議論を展開しようとするならば，無限次元ベクトル空間の凸錐 Ω の上で，非負の作用素 U_t を研究する必要があろう．これは数学的に言えば，作用素論の問題に帰着する．従って少なくともロトカの時代にあっては，そのようなアプローチは不可能であったと言えよう．

33）注13）参照．

34）注13）参照．

35）Herve Le Bras, "Une Formulation General de la Dynamique des Populations", ***Population***, numero special, 1977, pp.261－293

36）Joel E. Cohen, "Ergodic Theorems in Demography", ***Bulletin of the American Mathematical Society***, Vol 1, Number 2, 1979, pp.275－295

Deterministic Models of Multidimensional Population Growth

Hisashi INABA

This paper is aimed at investigating some deterministic models of multidimensional population groth under the Markovian assumption. These models are formulated as initial and boundary problems of simultaneous Von Foerster equations. In particular, if a boundary condition is given by a functional relation between boundary value and age-density functions, we can formulate the model as a initial value problem.

The multiregional population model which was first proposed by Herve Le Bras and Andrei Rogers is an important example of models which can be constructed as initial value problems. We expand this model into the case that the multiregional net maternity function depends on time. And we prove the existence theorem of the continuous solution in this more general case. Then we show sufficient conditions which make the balanced-growth solution possible for the case that the multiregional net maternity funtion is time-independent. The balanced-growth solution (or "balanced-growth population") is an exponentially growing population with a time-invariant age-by-region distribution. However it is remarkable that we can define a balanced-growth population regardless whether its time-invariant distribution is stable or not. If a balanced-growth population has a stable time-invariant distribution, it follows that this population process has what we call strong ergodicity. In such a case, the concept "balanced-growth population" coincide with the classical concept "stable population." Therefore the strong ergodic property of population growth is grasped as the stability of the time-invariant distribution under the balanced-growth.

37) n は離散的時間パラメータである．