多地域人口成長モデルにおける
パラメータ推定問題について[1)]

稲葉　寿

1. はじめに

Rogers と Willekens を中心として I I ASA（International Institute for Applied Systems Analysis）のプロジェクト「Migration and Settlement ; Multiregional Comparative Study[2)]」において開発された多地域人口成長モデルは，人口学における多次元モデル（multidimensional models）の代表的な成果であり，今日では地域人口プロジェクション[3)]に限らず労働力モデル（Willekens, 1980[4)]）や結婚モデル（Willekens, et al., 1982[5)]），世帯推計（Keilman, 1988[6)]）等に用いられるようになってきており，その応用範囲は極めて広いといえよう．一般に人口学における多次元モデルは，対象となる人口がなんらかの自然的，ないし社会的な属性によって状態別に部分人口へと分解されうる場合に，相互に結合された各部分人口のダイナミックスを統一的に記述しようとするものである．このような人口の諸属性としては，居住地域，結婚状態，パリティ等が考えられる．多次元の離散時間人口成長モデル（一般化レスリーモデル）は通常，線形差分方程式系で記述され，その数

1）本稿執筆のきっかけを与えて頂いた河辺宏教授（日本大学人口研究所），南条善治教授（福島県立医科大学）に感謝いたします．

2）IIASA のプロジェクト "The Migration and Settlement Study" は Andrei Rogers をリーダーとして関係17ケ国の研究者の協力のもとに1976年から7年間にわたっておこなわれ，その成果は IIASA の Research Report, Working Paper および研究誌 *Environment and Planning* の IIASA 特集号（Series A, Vol. 10, 1978, Vol.12, 1980）に公表されるとともに，Andrei Rogers and Frans Willekens eds., *Migration and Settlement: A Multiregional Comparative Study*, D. Reidel, 1986, として総括的報告がなされている．また関係17ケ国のすべてに対してこのモデルを適用した結果がカントリーレポートとして IIASA より発表されている（IIASA, Executive Report 9, 1986, 参照）．また以下もこれに関連した論文集である．Kenneth C. Land and Andrei Rogers eds., *Multidimensional Mathematical Demography*, Academic Press, 1982,　Andrei Rogers ed., *Migration, Urbanization, and Spatial Population Dynamics*, Westview Press, Boulder and London, 1984.

3）わが国について IIASA モデルを適用したものとしては以下がある．Zenji Nanjo, Tatsuhiko Kawashima and Toshio Kuroda, *Migartion and Settlement: 13. Japan*, Research Report RR-82-5, IIASA, 1982,　Toshio Kuroda and Zenji Nanjo, *Rogers' Model on Multiregional Population Analysis and its Application to Japanese Data*, NUPRI Research Paper Series No. 9, Nihon University, Tokyo, Japan, 1982,　川島辰彦，大鹿隆，大平純彦，木村文勝，「わが国の地域別年齢階級別将来人口像―ロジャーズ―ウィルキンス・モデル（IIASA モデル）の応用」，学習院大学『経済論集』，18巻2号，1982年，pp. 3－69.

4）F. J. Willekens, "Multistate analysis : tables of working life", *Environment and Planning* A, Vol.12, 1980, pp.563－588.

5）F. J. Willekens, I. Shah, J. M. Shah and P. Ramachandran, "Multi-state Analysis of Marital Status Life Tables : Theory and Application", *Population Studies*, 36(1), 1982, pp.129－144.

6）N. Keilman, "Dynamic household models", in Nico Keilman, Anton Kuijsten and Ad Vossen eds., *Modelling Household Formation and Dissolution*, Clarendon Press, Oxford, 1988, pp.123－138.

学的構造はよく知られている[7]．したがって実用上の主要な問題は，モデル中にあらわれるパラメータを経験的なデータから推定する点にある．Rogers（1975），Rogers and Ledent (1976), Willekens and Rogers（1978），Ledent and Rees（1980）[8] 等の主要な貢献はこの問題に対して多次元生命表の理論を定式化することによって解答を与えたことにある．しかし，Willekens（1984）[9]が示しているように，一般化レスリー行列の要素推定は，多地域生命表を前提とせずとも可能であるし，データの観測方法やプロジェクションの目的によっては，その方が適切である場合もある．

本稿の主要な目的は，Willekens -Rogers -Ledentの推定方法を，彼らの議論とは対照的に，多次元生命表の理論を経由することなく，連続時間モデルを直接に離散化するという方法によって示すことによって諸公式の背後にある仮定をより明確にし，その適用の限界を確定することである．また，連続体モデルを離れて，純粋に現象論的レベルにおいて一般化レスリー行列の要素推定を行うことも可能であることから，我々は地域に関して集計された人口（全国人口）が与えられている場合に，これとコンシステントな地域推計をおこなう手段としてそのようなパラメータ決定の方法を最後に考察することとしよう．

2. 一般化レスリーモデル

ここではまず，一般化レスリーモデル（the generalized Leslie model)の形式的構造についての結果をまとめておく[10]．

離散時間過程を考えるために時間および年齢の刻みを$h>o$としよう。$p_i^n(t)$を時刻$t(t=0,h,2h,\cdots)$において地域i $(i=1,2,\cdots,N)$,年齢区間〔$(n-1)h, nh$〕$(n=1,2,\cdots,\omega)$に属する人口数としよう．ただしNは地域の数，ωは年齢区間の数である．人口ベクトル$p^n(t)$, $p(t)$を以下のように定義する．

$$p^n(t)=\begin{pmatrix} p_1^n(t) \\ \vdots \\ p_N^n(t) \end{pmatrix}, \quad p(t)=\begin{pmatrix} p^1(t) \\ \\ p^{\omega}(t) \end{pmatrix} .$$

$s_{ij}(n)(1\leqq i,\ j\leqq N,\ 1\leqq n\leqq\omega)$を時間的に不変な生残率，すなわち年齢区間〔$(n-1)h$, nh〕において地域jに生存していた人口のうち，単位時間hの後年齢区間〔nh, $(n+1)h$〕において地域iに生残しているものの割合を示すとしよう．このとき定義から

7）一般化レスリーモデルの数学的構造については以下を参照． Andrei Rogers, *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley & Sons, 1975, Joel E. Cohen, "Multiregional age-structured populations with changing rates : weak and stochastic ergodic theorems", in Kenneth C. Land and Andrei Rogers eds., *Multidimensional Mathematical Demography*, New York, Academic Press, 1982, pp.477－503. 稲葉寿,「多地域人口成長の離散時間モデルについて」,『人口問題研究』, 第179号, 1986, pp. 1 －15.

8）Andrei Rogers and Jacques Ledent, "Increment-decrement life tables : a comment", *Demography*, 13(2), 1976, pp.287－290, Frans Willekens and Andrei Rogers, *Spatial Population Analysis : Methods and Computer Programs*, Research Report RR-78-18, 1978, IIASA, Laxenburg, Austria, Ledent, J. and Rees, P., *Choices in The Construction of Multiregional Life Tables*, Working Paper WP-80-173, 1980, IIASA, Laxenburg, Austria.

9）F.J.Willekens and P.Drewe, "A Multiregional Model for Regional Demographic Projection", in Henk ter Heide and Frans J. Willekens eds., *Demographic Research and Spatial Policy : The Dutch Experience*, Academic Press, 1984, pp.309－334.

10）注7）Rogers (1975), 稲葉 (1986) 参照．また以下を見よ． Kao-Lee Liaw, *Multiregional Population Projections : An Analytical Approach*, Working Paper WP-81-81, 1981, IIASA, Laxenburg, Austria.

$$p_1^{n+1}(t+h)=\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(n)\,p_j^n(t),\quad 1\leqq n\leqq\omega-1. \tag{2.1}$$

$S(n)$ を $s_{ij}(n)$ 要素とする $N\times N$ 行列とすれば

$$p^{n+1}(t+h)=S(n)P^n(t),\quad 1\leqq n\leqq\omega-1. \tag{2.2}$$

ただし，$p^{\omega}(t)$ がオープンエンドの年齢区間〔$(\omega-1)h$，∞）の人口を示す場合，$s_{ij}(\omega)$を年齢区間〔$(\omega-1)h$，∞)において地域 j に生存していた人口のうち単位時間 h 後に年齢区間〔ωh, ∞）において地域 i に生存しているものの割合として，これを第(i, j)要素とするN次行列を$S(\omega)$として，(2.2）のかわりに

$$p^{\omega}(t+h)=S(\omega-1)\,p^{\omega-1}(t)+S(\omega)\,p^{\omega}(t), \tag{2.3}$$

を用いる場合もある。一方，$S(\omega)$ を使用しない場合は $s_{ij}(\omega-1)$ は生残率ではなく単に j －地域における年齢区間〔$(\omega-1)h$, ωh〕の人口と h 時間後の i －地域における年齢区間〔ωh, ∞)の人口との比をあらわすと解釈される．つぎに$m_{ij}(n)$ を有効出生率 (effective fertility rate), すなわち時刻 t において地域 j に生存していた一個体から，時間〔t，$t+h$〕のあいだに出生し，時刻 $t+h$ において地域 i，年齢区間〔0，h〕に生残している個体数の平均を示すとしよう．このとき

$$p_i^1(t+h)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{\omega} m_{ij}(n)\,p_j^n(t). \tag{2.4}$$

$M(n)$ を$m_{ij}(n)$ を(i, j)要素とする$N\times N$行列とすれば,

$$p^1(t+h)=\sum_{n=1}^{\omega} M(n)\,p^n(t). \tag{2.5}$$

一般化レスリー行列(generalized Leslie matrix)を以下のように定義する.

$$G=\begin{pmatrix} M(1), & M(2), & \cdots\cdots, & M(\omega) \\ S(1) & O & \cdots\cdots & O \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & O\ , & O \\ & & S(\omega-1), & S(\omega) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

ここでむろん$S(\omega)$を用いない場合は$S(\omega)=0$ とおくとする．以上の定義によって以下を得る.

$$p(t+h)=G\cdot p(t) \tag{2.7}$$

この差分システムを一般化レスリーモデルまたは多地域投影過程（multiregional projection process）とよぶ．（2.7）に従う人口 $p(t)$ は初期人口 $p(0)$ が与えられれば，時刻 $t=mh$，$m=0$, 1, 2, …について $p(t)=G^m p(0)$ によって定まる．G は非負行列であるから，非負の固有値 λ_0（Frobenius 根）と対応する非負固有ベクトル φ_0 を有する（Perron-Frobenius の定理）．さらに G が原始的（primitive）であれば，フロベニウス根 λ_0 は他の固有値の絶対値のいずれよりも大きく（strictly dominant），固有方程式の単根（simple root）である．このとき以下が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_0^{-n}G^n\cdot p(0)=\frac{\langle v_0, p(0)\rangle}{\langle v_0, \varphi_0\rangle}\varphi_0, \tag{2.8}$$

ここで v_0 はフロベニウス根に対応する G の左固有ベクトルであり，$\langle,\rangle$はベクトルの内積である.
一般に G が厳密に支配的で単純な実固有根 λ_0 をもてば，人口ベクトルは時間とともに漸近的に λ_0 に対応する固有ベクトル φ_0 に比例するようになり，その成長率は λ_0 となる．すなわち φ_0 は安定人口分布であり，λ_0 は安定人口成長率を与える（強エルゴード定理）.

3. 連続時間モデル

対象となる人口の規模が十分に大きい場合には連続体モデルが有効である。実際，後にみるように，大規模人口の各種の動態率（vital rates）は連続的な状態間推移強度関数の重み付き平均で与えられると考えられる．そこで我々は以下において連続時間多地域人口モデルを定式化し，次節以降においてこれを離散化することによって離散時間モデルのパラメータ推定問題を考えることにしよう[11]．

$p_i(a,t)$ を時刻 t における地域 i の年齢密度関数とする．すなわち $\int_a^b p_i(z,t)dz$ は地域 i における年齢区間〔a,b〕の人口数を与える．人口ベクトル $p(a,t)$ を

$$p(a,t)=\begin{pmatrix} p_1(a,t) \\ \vdots \\ p_N(a,t) \end{pmatrix};$$

と定義する。このとき連続時間の（時間的斉次）多地域人口モデルは以下のシステムによって表される．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}p(a,t)=\left(-\frac{\partial}{\partial a}+Q(a)\right)p(a,t), \\ &p(0,t)=B(t), \\ &p(a,0)=k(a), \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで $k(a)$ は初期人口ベクトルである．$Q(a)$ は $N\times N$ 次の本質的に非負な行列であり，その（i,j）要素 $q_{ij}(a)$（$i\neq j$）は年齢 a の人口が j 地域から i 地域へ移動する瞬間的移動率であり，対角要素は以下で与えられる．

$$q_{jj}(a)=-\mu_j(a)-\sum_{i\neq j}q_{ij}(a), \tag{3.2}$$

ここで $\mu_j(t)$ は地域 j における死亡力関数である．境界条件を与えるベクトル $B(t)$ の第 i 要素 $B_i(t)$ は地域 i における単位時間あたりの出生児数である．行列微分方程式

$$\frac{d}{da}L(a)=Q(a)L(a),\ L(0)=I \quad (I\text{ は単位行列}), \tag{3.3}$$

の解として生残率行列 $L(a)$ を定義すれば，$L(a)$ の第（i,j）要素 $l_{ij}(a)$ は j 地域で出生したもののうち，年齢 a で i 地域に生残しているものの割合を示している．推移率行列 $L(b,a)$ を $L(b,a)=L(b)L^{-1}(a)$ によって定義すれば，一般に

$$p(a+h,\ t+h)=L(a+h,\ a)p(a,t),\ h\geqq 0, \tag{3.4}$$

であり，システム（3.1）の解は以下のように与えられる．

$$p(a,t)=\begin{cases} L(a)B(t-a), & t-a>0, \\ L(a,a-t)k(a-t), & a-t\geqq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

とくに C を定数ベクトルとして $B(t)=C$; $k(a)=L(a)C$ と仮定すればすべての $t\geqq 0$ に対して $p(a,t)=L(a)C$ を得る．これは基数ベクトル C をもつ定常人口モデルに他ならない．一般には $B(t)$ と $p(a,t)$ の間になんらかの汎関数関係が存在する．とくに安定人口モデルにおいては $B(t)$

11) 連続時間モデルについては前掲 Rogers (1975)（注7）の他に以下を参照せよ．稲葉寿，「多次元人口成長の決定論的モデル」，『人口問題研究』，第172号，1984, pp.39－62,　稲葉寿，「多次元安定人口理論の数学的基礎 I：古典論」，『人口問題研究』，第184号，pp.52－77,　Hisashi Inaba, "A Semigroup Approach to the Strong Ergodic Theorem of the Multistate Stable Population Process", *Mathematical Population Studies*, Vol. 1, No. 1, pp.49－77, 1988.

は年齢密度関数の線形汎関数

$$B(t)=\int_0^{\infty}M(a)\,p(a,\ t)\,da, \qquad (3.6)$$

によって与えられる。ただしここで$M(a)$は対角行列であり，その対角要素$m_{ii}(a)$は地域iにおける年齢別出生率を示す出生率関数である．（3.5）を（3.6）に投入すれば，ロトカの再生方程式（Lotka's renewal equation）

$$B(t)=G(t)+\int_0^{\infty}\Psi(a)\,B(t-a)\,da$$

$$\Psi(a)=M(a)\,L(a),\quad G(t)=\int_t^{\infty}M(a)\,L(a,a-t)\,k(a-t)\,da \qquad (3.7)$$

を得る．$\hat{\Psi}(\lambda)=\int_0^{\infty}\exp(-\lambda a)\,\Psi(a)\,da$ とおけば，$\hat{\Psi}(0)$ が分解不能であれば実数rが存在して$\hat{\Psi}(r)$ は Frobenius 根として1を有し，対応する固有ベクトルをφとすれば，定数Cが存在して，

$$\lim_{t\to\infty}\exp(-rt)\,B(t)=C\varphi \qquad (3.8)$$

となることがわかる。したがってこのとき安定分布は $C\exp(-ra)\,L(a)\varphi$ で与えられ，安定人口成長率はrとなる．

4. 生残率の推定

この節では地域間生残率$s_{ij}(n)$の推定方法を考えよう．定義より以下が成り立つ．

$$p_i^n(t)=\int_{(n-1)hi}^{nh}p_i(a,t)\,da \qquad (4.1)$$

一方，（3.4）より

$$p_i(a+h,\ t+h)=\sum_{j=1}^{N}l_{ij}(a+h,a)\,p_j(a,t),\ 1\leqq i\leqq N, \qquad (4.2)$$

ただし$l_{ij}(b,\ a)$は$L(b,\ a)$の第（i，j）要素である．（4.1），（4.2）より

$$p_i^{n+1}(t+h)=\int_{nh}^{(n+1)h}p_i(a,\ t+h)\,da=\int_{(n-1)h}^{nh}p_i(a+h,\ t+h)\,da$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{(n-1)h}^{nh}l_{ij}(a+h,\ a)\,p_j(a,t)\,da \qquad (4.3)$$

以下において我々は人口$p(a,\ t)$が高々安定人口（stable population）であると仮定する．すなわちrを自然成長率とすれば，ある定数ベクトル$C=(c_1,\ \cdots,\ c_N)^{\tau}$が存在して

$$p_i(a,\ t)=\sum_{j=1}^{N}\exp(r(t-a))\,l_{ij}(a)\,c_j,\ 1\leqq i\leqq N, \qquad (4.4)$$

とかける。特に$r=0$の場合は定常人口（stationary population）である．これを（4.3）に投入して，$l_{ij}(b,\ a)$の増殖性（multiplicative property）[12]を用いれば，

$$p_i^{n+1}(t+h)=\sum_{j=1}^{N}\int_{(n-1)}^{nh}\exp(t-a)\ l_{ij}(a+h)\,da\cdot c_j. \qquad (4.5)$$

（2.1）より，

12）生存率（推移率）$L(b,\ a)$の増殖性（推移性）とは以下の性質をさす．

$$L(b,a)=L(b,c)\,L(c,a),\ a\leqq c\leqq b.$$

$$p_i^{n+1}(t+h)=\sum_{j=1}^{N}s_{ij}(n)\bar{p}_j^n(t)=\sum_{j=1}^{N}s_{ij}(n)\int_{(n-1)h}^{nh}p_j(a,t)\,da$$
$$=\sum_{j=1}^{N}s_{ij}(n)\sum_{k=1}^{N}\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(r(t-a))\,l_{jk}(a)\,da\cdot c_k. \tag{4.6}$$

（4.5）および（4.6）より，以下を得る．

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)\,l_{ik}(a+h)\,da\cdot c_k$$
$$=\sum_{j=1}^{N}s_{ij}(n)\sum_{k=1}^{N}\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)\,l_{jk}(a)\,da\cdot c_k \tag{4.7}$$

（4.7）は任意の基数ベクトルCに対して成り立つ必要があるから，以下の関係式を得る．

$$\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)\,l_{ik}(a+h)\,da$$
$$=\sum_{j=1}^{N}s_{ij}(n)\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)\,l_{jk}(a)\,da. \tag{4.8}$$

行列記法によれば，以下のごとく書き直せる．

$$\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)L(a+h)\,da=S(n)\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)L(a)\,da, \tag{4.9}$$

特に定常人口の場合は，

$$\hat{L}(n+1)=S(n)\hat{L}(n),\quad 1\leqq n\leqq\omega-1. \tag{4.10}$$

となる．ただしここで，

$$\hat{l}_{ij}(n)=\int_{(n-1)h}^{nh}l_{ij}(a)\,da,\ \hat{L}(n)=\int_{(n-1)h}^{nh}L(a)\,da.$$

である．すなわち定常人口において$S(n)$は以下のように与えられる．

$$S(n)=\hat{L}(n+1)\hat{L}^{-1}(n). \tag{4.11}$$

ただし（4.11）においては，$\hat{L}(n)$が逆行列を有し，右辺が非負行列を与えることを仮定せねばならない．一般に，考えている人口過程が非定常（non-stationary）であれば（4.11）は成り立たない．しかし各年齢区間で区分的に定常人口によって近似される場合，すなわち各時間間隔において出生児数がほぼ一定であり，死亡率，移動率の時間的変動が十分に小であれば，（4.11）が近似的になりたつと考えてもよいであろう．

さて以上の準備の下で観測されるデータから$S(n)$をもとめることを考えよう．一般に人口学的なパラメータの推定方法は，どのような観測によってデータが入手されるかに強く依存している．連続体モデルを背景として考えれば，人口学的事象の瞬間的な年齢別発生率（または人口の状態間推移強度）$\lambda(a)$に対して，観測される動態率$\Lambda(\Omega)$はレキシス平面上の重み付き平均

$$\Lambda(\Omega)=\iint_{\Omega}\lambda(a)\,p(a,t)\,dadt\Big/\iint_{\Omega}p(a,t)\,dadt, \tag{4.12}$$

で与えられると考えられる[13]．一方，人口学的なデータ観測としては以下の三種が考えられる，(1)期間的観測（period observation），(2)期間・コーホート的観測（period-cohort observation），(3)コーホート的観測（cohort observation）[14]．これらに対応して（4.12）における積分領域Ωは(1) ABCD，

13）Jan M. Hoem, "On the Interpretation of Certain Vital Rates as Averages of Underlying Forces of Transition", *Theoretical Population Biology* 2, pp.454−468, 1971.

14）前掲 Willekens (1984)（注9）参照．

(2) ABDF, (3)BCED, のようになる（図1参照）.

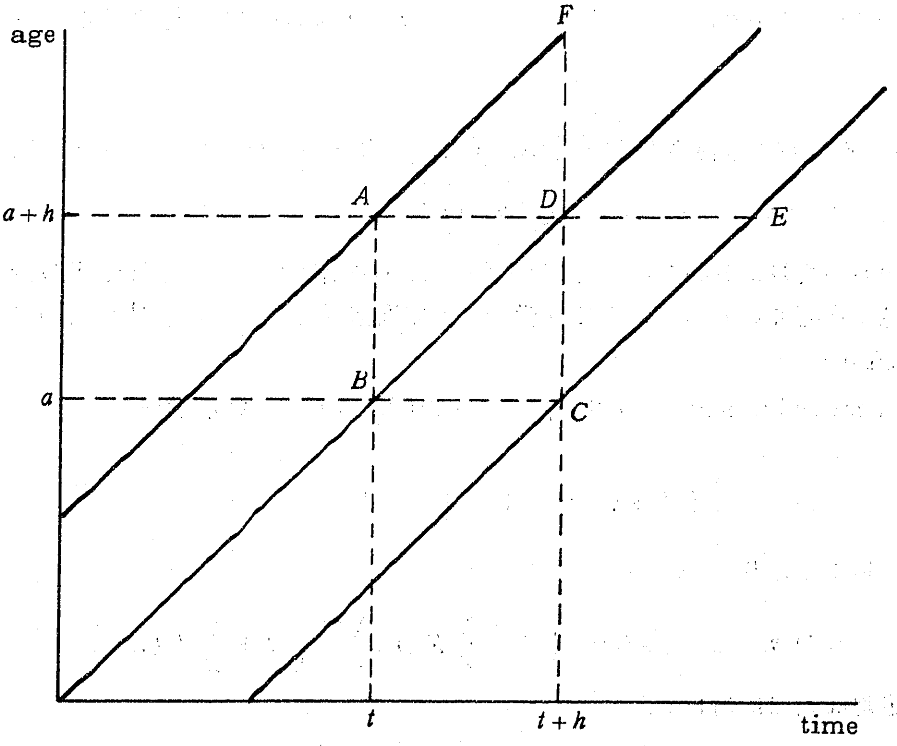

図1

期間的観測とコーホート的観測において重要なことは，高々安定人口に対しては年齢区間〔$(n-1)h$, nh〕において観測される動態率 $\Lambda(n)$ について，$l(a)$ を生残率とすれば，

$$\Lambda(n)=\int_{(n-1)h}^{nh}\lambda(a)\,l(a)\,da\Big/\int_{(n-1)h}^{nh}l(a)\,da, \tag{4.13}$$

が成り立つことである[15]. ただし，ここでは single-state の場合を考えているが，multi-stateの場合は右辺の割り算を逆行列を掛ける操作であると考えればよい．このとき，我々のモデルについては以下が成り立つことが示される。

補題 4.1　$R(n)$ を高々安定人口に対してコーホート的観測をおこなって得た移動率行列であるかまたは，定常人口に対して期間的観測をおこなって得た移動率行列であるとすれば以下が成り立つ.

$$\int_{(n-1)h}^{nh}Q(a)\,L(a)\,da=R(n)\,\hat{L}(n). \tag{4.14}$$

（証明）　$r_{ij}(n)$ を仮定のように観測された年齢階級 n の地域 j から地域 i への人口移動率とすれば，以下が成り立つことが（4.12）を仮定のもとで計算することによって容易に確かめられる.

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{(n-1)h}^{nh}q_{ij}(a)\,l_{jk}(a)\,da\cdot c_k$$
$$=r_{ij}(n)\sum_{k=1}^{N}\int_{(n-1)h}^{nh}l_{jk}(a)\,da\cdot c_k \tag{4.15}$$

ここで c_k は基数ベクトルの第 k 成分である．これがすべての基数ベクトル C でなりたつには

15) 前掲 Hoem (1971)（注13）参照.

$$\int_{(n-1)h}^{nh} \exp(-ra)\ q_{ij}(a)\ l_{jk}(a)\, da = r_{ij}(n)\, \hat{l}_{jk}(n), \qquad (4.16)$$

となることが必要十分である．$R(n)$ は $r_{ij}(n)$ を $(i,\ j)$ 成分とする行列であるから（4.14）が成り立つ．□

このとき $d_j(n)$ を同様に観測された死亡率とすれば，以下が成り立つことがわかる．

$$r_{jj}(n) = -d_j(n) - \sum_{i \neq j} r_{ij}(n). \qquad (4.17)$$

またIIASA関連の文献においては，しばしば $-R(n)$ に相当するものを移動率の行列として用いていることに注意する必要がある．以上の準備のもとで推移率行列および生残率行列に対するRogers-Ledent の公式を示そう．

命題4.2（Rogers and Ledent，1976）補題4.1の仮定の下で，線形近似

$$\hat{L}(n) = \frac{h}{2}\{ L(nh) + L((n-1)h) \}, \qquad (4.18)$$

を採用すれば，以下が成り立つ．

$$L(nh,\ (n-1)h) = \left(I - \frac{h}{2} R(n) \right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2} R(n) \right). \qquad (4.19)$$

また区分的に定常な人口に対して，

$$S(n) = \left(I - \frac{h}{2} R(n+1) \right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2} R(n) \right). \qquad (4.20)$$

年齢区間 ω がオープンエンドであり，$S(\omega)$ を用いない場合には，

$$S(\omega-1) = -\frac{1}{h} R^{-1}(n) \left(I + \frac{h}{2} R(\omega-1) \right). \qquad (4.21)$$

（証明）$L(a)$ の定義（3.3）から

$$\frac{d}{d\rho} L(a+\rho) = Q(a+\rho) L(a+\rho).$$

したがって，

$$L(a+h) = L(a) + \int_0^h Q(a+\rho) L(a+\rho)\, d\rho, \qquad (4.22)$$

を得る。（4.14）を用いれば，

$$L(nh) = L((n-1)h) + R(n)\hat{L}(n). \qquad (4.23)$$

（4.18），（4.23）から，

$$\begin{aligned} L(nh,\ (n-1)h) &= I + R(n)\hat{L}(n) L^{-1}((n-1)h) \\ &= I + R(n) \frac{h}{2}\{ L(nh) + L((n-1)h) \} L^{-1}((n-1)h) \\ &= I + R(n) \frac{h}{2} L(nh,\ (n-1)h) + \frac{h}{2} R(n). \end{aligned}$$

これよりただちに（4.19）を得る。また（4.18）から

$$L(n) = \frac{h}{2}\{ L(nh,\ (n-1)h) + I \} L((n-1)h).$$

これを（4.10）に投入すれば，

$$S(n)=\{L((n+1)h,nh)+I\}L(nh,(n-1)h)\{L(nh,(n-1)h)+I\}^{-1}$$

となる。一方，（4.19）から

$$L(nh,(n-1)h)+I=I+\left(1-\frac{h}{2}R(n)\right)^{-1}\left(1+\frac{h}{2}R(n)\right)$$
$$=2\left(I-\frac{h}{2}R(n)\right)^{-1}.$$

したがって，

$$S(n)=\left(I-\frac{h}{2}R(n+1)\right)^{-1}\left(I-\frac{h}{2}R(n)\right)^{-1}\left(I+\frac{h}{2}R(n)\right)\left(I-\frac{h}{2}R(n)\right)$$
$$=\left(I-\frac{h}{2}R(n+1)\right)^{-1}\left(I+\frac{h}{2}R(n)\right),$$

となり，（4.20）を得る．年齢区間ωがオープンエンドである場合，

$$p_i(t)=\int_{(\omega-1)n}^{\infty}p_i(a,t)\,da,$$

であるから，

$$\hat{L}(\infty)=\int_{\omega h}^{\infty}L(a)\,da$$

とすれば，（4.10），（4.23）から，

$$S(\omega-1)=(\hat{L}(\omega)+\hat{L}(\infty))L^{-1}(\omega-1),$$
$$L((\omega-1)h)+R(\omega)\{\hat{L}(\omega)+\hat{L}(\infty)\}=0.$$

よって容易に（4.21）を得る．□

次に期間・コーホート的観測によってデータが得られた場合を考えよう．このときは高々安定人口に対して（4.13）にかわって，

$$\Lambda(n)=\frac{\int_{(n-1)h}^{nh}\int_{0}^{h}\exp(-ra)\lambda(a+\rho)l(a+\rho)\,d\rho\,da}{\int_{(n-1)h}^{nh}\int_{0}^{h}\exp(-ra)l(a+\rho)\,d\rho\,da},$$

となる．このとき以下が示せる．

命題4.3（Willekens，1984） 高々安定人口に対して期間・コーホート的観測をおこなって得られた移動率行列を$R(n)$とし，線形近似

$$\int_{0}^{h}L(a+\rho)\,d\rho=\frac{h}{2}\{L(a)+L(a+h)\}, \tag{4.24}$$

を採用すれば以下が成り立つ．

$$S(n)=\left(1+\frac{h}{2}R(n)\right)^{-1}\left(1-\frac{h}{2}R(n)\right). \tag{4.25}$$

また年齢区間ωがオープンエンドである場合，（2.3）を採用すれば$n=\omega-1$，$n=\omega$に対しても（4.25）が成り立つ．

（証明）（4.22）より以下を得る

$$\exp(-ra)L(a+h)=\exp(-ra)L(a)+\exp(-ra)\int_0^h Q(a+\rho)L(a+\rho)d\rho.$$

これを積分して，

$$\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)L(a+h)da=\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)L(a)da$$
$$+\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)\int_0^h Q(a+\rho)L(a+\rho)d\rho. \quad (4.26)$$

ここで

$$D(n)=\int_{(n-1)h}^{nh}\exp(-ra)L(a)da,\ (1\leqq n\leqq\omega),$$
$$D(\infty)=\int_{\omega h}^{\infty}\exp(-ra)L(a)da,$$

と定義しておこう。仮定から $R(n)$ は

$$R(n)=\int_{(n-1)}^{nh}\int_0^h\exp(-ra)Q(a+\rho)L(a+\rho)d\rho da\times$$
$$\left[\int_{(n-1)}^{nh}\int_0^h\exp(-ra)L(a+\rho)d\rho\, da\right]^{-1},$$

であり，（4.24）より，

$$\int_{(n-1)}^{nh}\int_0^h\exp(-ra)L(a+\rho)da=\frac{h}{2}[D(n+1)+D(n)].$$

（4.26）から，

$$D(n+1)=D(n)+R(n)\cdot\frac{h}{2}[D(n+1)+D(n)].$$

（4.9）から

$$S(n)=D(n+1)D^{-1}(n)=\left(I+\frac{h}{2}R(n)\right)^{-1}\left(I-\frac{h}{2}R(n)\right),$$

を得る．区間ωがオープンエンドである場合に$S(\omega)$を計算しよう。（4.22）から

$$0=D(\omega)+\int_{(\omega-1)h}^{\infty}\int_0^h\exp(-ra)Q(a+\rho)L(a+\rho)d\rho da$$

また（4.24）から

$$\int_{(\omega-1)}^{\infty}\int_0^h\exp(-ra)L(a+\rho)d\rho da=\frac{h}{2}[2D(\infty)+D(\omega)].$$

したがって

$$D(\omega)+\frac{h}{2}R(\omega)[2D(\infty)+D(\omega)]=0,$$

であり，

$$D(\infty)D^{-1}(\omega)=\frac{-1}{h}R^{-1}(\omega)\left(I+\frac{h}{2}R(\omega)\right),$$

を得る．一方，$S(\omega)$は

$$S(\omega)=D(\infty)[D(\infty)+D(\omega)]^{-1}=D(\infty)D^{-1}(\omega)[D(\infty)D^{-1}(\omega)+I]^{-1},$$

で与えられるから，

$$D(\infty)D^{-1}(\omega)+I=\frac{-1}{h}R^{-1}(\omega)\left(I-\frac{h}{2}R(\omega)\right),$$

に注意すれば直ちに（4.25）において$n=\omega$としたもの得る．□

命題4.2および4.3で示したような方法は，それらが必ずしも生残率や推移確率として非負の値を与えないという点で，無意味な結果を与える場合があることにを注意せねばならない（Hoem and Jensen, 1982；Nour and Suchindran, 1984[16]）．問題は，一般に（$1-h/2R(n)$）が非負の逆行列を持つとは限らない点にある．Rogers-Ledentの公式（4.20）において，非負の生残率が得られるためには明らかに，

(1) $\left(I-\frac{h}{2}R(n+1)\right)^{-1}$ が非負逆転可能（nonnegatively invertible）である，

(2) $1+\frac{h}{2}r_{ii}(n)\geqq 0$,

となることが十分である．(2)は期間hが十分小であればたいてい満たされうるであろう．一方，(1)については，$R(n)$は非対角要素が非負であるから，（$I-R(n+1)h/2$）が非負逆転可能であるためには，N個の主座小行列式がすべて正値であればよい（Hawkins-Simon's condition[17]）．しかしこうした条件を確かめることは，行列の次数がおおきければ逆行列を計算するのと同程度の手間がかかるであろうから，実際上は公式を計算してみるまでは判断できないということになろう．ただし，移動率が小さい場合は概ね Willekens-Rogers-Ledent の処方がうまくいくことはすでに多くの研究が示しているところである．

上記のような単純な計算式を見出せた原因は線形近似（4.18）の仮定にあるが，Hoem and Jensen（1982）が推奨するように，推移強度$Q(a)$が区分的に定数であると仮定したほうが論理的に整合的であり，推移確率を計算する上では都合がよい．ただし，hが大きい値であればこうした仮定は受入れ難い．そこでいま，各nについて定数行列$T(n)$が存在して，

$$Q((n-1)h+\rho)=T(n),\quad 0\leqq\rho<h, \tag{4.27}$$

と仮定すれば，

$$\frac{d}{d\rho}L((n-1)h+\rho,\ (n-1)h)=T(n)L((n-1)h+\rho,\ (n-1)h),$$
$$0\leqq\rho<h,\quad L((n-1)h,\ (n-1)h)=I, \tag{4.28}$$

となるから，

$$L((n-1)h+\rho)=\exp(T(n)\rho)L((n-1)h),\quad 0\leqq\rho<h, \tag{4.29}$$

を得る．ここで$T(n)$は本質的に非負であるから，$\exp(T(n)\rho)$は常に非負行列を与える（Birkhoff and Varga, 1958[18]）．したがって推移確率$L(nh,\ (n-1)h)$は

16) Jan M. Hoem and Ulla Funck Jensen, "Multistate Life Table Methodology: A Probabilist Critique", in Kenneth C. Land and Andrei Rogers eds., *Multidimensional Mathematical Demography*, Academic Press, pp.155−264, 1982. El-Sayed Nour and C. M. Suchindran, "The Construction of Multi-state Life Tables: Comments on the Article by Willekens et al.", *Population Studies*, 38, pp.325−328, 1984.

17) 二階堂副包,『経済のための線形数学』, 培風館, 1961, p.67.

18) Birkhoff, G. and Varga, R. S., "Rcactor Criticality and Nonnegative Matrices", *Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 6, No. 4, pp.354−377, 1958. 一般に対角要素以外のすべての要素が非負である行列を本質的に非負（essentially nonnegative）という．

$$L(nh, (n-1)h) = \lim_{\rho \to h} L((n-1)h+\rho, (n-1)h) = \exp(T(n)h),$$

によって求められ，非負行列になる．定常人口に対する期間的ないしコーホート的観測で得られた移動率行列を $R(n)$ とすれば，（4.14）から明らかに $R(n) = T(n)$ である．よってこのときは（4.19）にかわって

$$L(nh, (n-1)h) = \exp(R(n)h), \tag{4.30}$$

を得る．この場合定常人口に対して，

$$S(n) = \int_0^h \exp(R(n+1)\rho)\, d\rho \cdot \exp(R(n)h) \times \left[\int_0^h \exp(R(n)\rho)\, d\rho\right]^{-1}, \tag{4.31}$$

となる．実際，（4.29）から

$$\hat{L}(n) = \int_0^h L((n-1)h+\rho)\, d\rho = \int_0^h \exp(R(n)\rho)\, d\rho \cdot L((n-1)h),$$

であるから，

$$S(n) = \hat{L}(n+1)\hat{L}^{-1}(n) = \int_0^h \exp(R(n+1)\rho)\, d\rho \cdot L(nh, (n-1)h) \times \left[\int_0^h \exp(R(n)\rho)\, d\rho\right]^{-1},$$

となり，（4.30）から（4.31）を得る．ただし，この場合ももはや $S(n)$ が常に非負行列であるとは限らないことを注意せねばならない．とくに積分項の計算にあたって台形公式

$$\int_0^h \exp(R(n)\rho)\, d\rho = \frac{h}{2}[I + \exp(R(n)h)], \tag{4.32}$$

を用いた場合は再び（4.20）を得る．

5. 有効出生率の推定

ここでは有効出生率行列 $M(n)$ を計算しよう．$B_i(t)$ を地域 i における単位時間当たりの出生児数とし，$b_i(a)$ を地域 i での年齢別出生率とすれば，

$$B_i(t) = \int_0^\infty b_i(a)\, p_i(a,t)\, da \tag{5.1}$$

一方，地域 i での年齢区間 n の出生率 $f_i(n)$ は変数分離型の人口に対して期間的に観測されるとすれば，時間区間〔$(m-1)h, mh$〕について

$$f_i(n) = \int_{(n-1)h}^{nh} b_i(a)\, p_i(a,t)\, da \Big/ \int_{(n-1)h}^{nh} p_i(a,t)\, da. \tag{5.2}$$

で与えられる．明らかに $p_i(a,t)$ が高々安定人口であれば右辺は時間に無関係となる．いま出生率について，

$$b_i(a) = 0, \quad a \leqq (\alpha-1)h, \quad \beta \leqq a, \tag{5.3}$$

と仮定すれば，（5.1），（5.2）から

$$B_i(t) = \sum_{n=\alpha}^{\beta} f_i(n) \int_{(n-1)h}^{nh} p_i(a,t)\, da. \tag{5.4}$$

一方，（3.5）から

$$p_i(a,t)=\sum_{j=1}^{N} l_{ij}(a)B_j(t-a),\quad 1\leqq i\leqq N, \tag{5.5}$$

であるから,

$$p_i^1(t+h)=\int_0^h p_i(a,t+h)\,da=\sum_{j=1}^{N}\int_0^h l_{ij}(a)B_j(t+h-a)\,da. \tag{5.6}$$

ここで線形近似

$$\int_0^h l_{ij}(a)B_j(t+h-a)\,da=\hat{l}_{ij}(1)\cdot\frac{1}{2}[B_j(t)+B_j(t+h)], \tag{5.7}$$

を用いれば, 以下を得る.

$$\begin{aligned} p_i^1(t+h) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\hat{l}_{ij}(1)[B_j(t)+B_j(t+h)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\hat{l}_{ij}(1)\left[\sum_{n=\alpha}^{\beta} f_j(n)p_j^n(t)+\sum_{n=\alpha-1}^{\beta} f_j(n+1)\sum_{k=1}^{N}s_{jk}(n)p_k^n(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=\alpha-1}^{\beta}\sum_{j=1}^{N}\left[\hat{l}_{ij}(1)f_j(n)+\sum_{k=1}^{N}\hat{l}_{ik}(1)f_k(n+1)s_{kj}(n)\right]p_j^n(t). \end{aligned} \tag{5.8}$$

$F(n)$ を第 i 対角要素が $f_i(n)$ であるような対角行列であるとすれば, (5.8) から以下の公式を得る。

$$M(n)=\frac{1}{2}\hat{L}(1)[F(n)+F(n+1)S(n)]. \tag{5.9}$$

前節までの結果から $\hat{L}(1)$, $S(n)$ がもとまれば, (5.9) によって有効出生率行列 $M(n)$ が計算されることになる.

6. その他の方法ー全国推計とコンシステントな地域推計についてー

一般化レスリーモデルによる多地域人口推計は, 従来おこなわれてきた純移動率を用いた地域推計 (コーホート要因法)[19] と比較すると, 人口学的バランスにおいて矛盾がなく多地域の同時推計が行えるという点に特徴がある. いま i 地域における年齢階級 $[(n-1)h,\ nh]$ の人口の生残率を $l_i(n)$, 前進法による純移動率を $v_i(n)$ とすれば,

$$p_i^{n+1}(t+h)=l_i(n)p_i^n(t)+v_i(n)p_i^n(t), \tag{6.1}$$

とかける. いまかりに $l(n)$ を全国人口におけるセンサス間生残率であるとすれば, これによって算出された純移動率については

$$\sum_{i=1}^{N}p_i^{n+1}(t+h)-l(n)\sum_{i=1}^{N}p_i^n(t)=\sum_{i=1}^{N}v_i(n)p_i^n(t)=0, \tag{6.2}$$

でなければならない. しかしある時点間の人口から計算された純移動率を固定して将来人口のプロジェクションをおこなうと, この関係は直ちに破壊されてしまう. したがって極端な場合には, あるコーホートの人口を地域について集計すると, 人口が年齢とともに増大してしまう場合すらある. このような現象は地域別生命表によって純移動率を計算した場合にも同様におこる可能性があるから, こうした矛盾を回避するために, 純移動率に対してアドホックに修正を加える必要がある. 一般化レスリーモデルにおいてはこうした矛盾は発生する余地はないが, 必要とすべきデータはコーホート要因

19) コーホート要因法による地域人口推計については以下を参照. 河辺宏, 山本千鶴子, 稲葉寿,「コーホート要因法による地域人口推計手法の検討と推計結果の分析」,『人口問題研究』, 第167号, pp.32−52, 1983.

法に比べて格段に多く，操作性が悪いことが欠点である.[20]

一国レベルでの将来人口推計は，固定レートによるプロジェクションであることは稀であり，出生率や死亡率の将来的変動を仮定したパラメータ時変モデルによっておこなわれることが多い．その際，出生率や死亡率に比べてその変動が予測しがたく，数も多い状態間人口移動率を将来にわたって設定することは極めて困難であろうから，全国推計が時変パラメータをもつ一般化レスリーモデルによってなされることはほとんどないであろう.[21] したがって何らかの方法による全国推計をおこなったあとで，これを全体的フレームとして，これとコンシステントな地域推計を行う必要がある場合がしばしばある．こうした場合には，過去のデータから推定されたパラメータ値に修正を加えて，全国推計の結果と矛盾のないようにしなければならない．以下ではこうした観点から，人口移動のマルコフ性を利用したパラメータ推定方法を考えよう．

いま時刻 t での全人口にたいする生残率 $l(n, t)$ が与えられているとしよう．すなわち，

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^{n+1}(t+h) = l(n, t)\sum_{i=1}^{N} p_i^n(t). \tag{6.3}$$

また時間に依存する地域間生残率を $s_{ij}(n, t)$ とすれば，

$$p_i^{n+1}(t+h) = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}(n, t)\, p_j^n(t). \tag{6.4}$$

そこでいま $s_{ij}(n, t) = \lambda_{ij}(n)\, l(n, t)$ と書けると仮定しよう．するとこのとき，

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^{n+1}(t+h) = l(n, t)\sum_{i=1}^{N} p_i^n(t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} s_{ij}(n, t)\, p_j^n(t),$$

であるから，

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^n(t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}(n)\, p_j^n(t).$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij}(n) = 1, \tag{6.5}$$

すなわち，N次行列 $\Lambda(n) = [\lambda_{ij}(n)]_{1 \le i, j \le N}$ はマルコフ行列であり，$\lambda_{ij}(n)$ は地域 j に生残していた人口のうち，次期に地域 i に生残しているものの割合である．$\Lambda(n)$ が既存のデータから推定されれば，これを固定して，与えられた全国推計から得られる $l(n, t)$ と組合わせて $S(n, t) = \Lambda(n)\, l(n, t)$ がきまる．すなわち，この方式では時間的に変動する部分をすべて $l(n, t)$ におしこめて人口の各地域への配分比をきめるマルコフ行列を定常であると仮定することになる．これは長期間にわ

---

20) 日本の都道府県別人口推計を一般化レスリーモデルを用いておこなうとすると，年齢を５歳階級別18階級としておこなったとしても，一つのレスリー行列を構成するゼロでないエレメントの数は，再生産年齢人口が７階級にまたがると仮定して，一つの性に対して47×47×（17＋７）＝53016におよぶこととなる．これまでIIASA等でおこなわれた例においては高々N＝11であり，この場合の要素数は2904となる．因にコーホート要因法による都道府県別推計においては上記の仮定のもとで一期間の推定に用いるパラメータの数は47×（18＋７＋18）＝2021である．

21) 川島（1982，注３）等はパラメータ時変型一般化レスリーモデル（改訂ロジャース—ウィルキンス・モデル）を提案しているが，彼らのモデルも出生と死亡の動向に関する先験的な仮定にもとづいた一種のシナリオ分析である．彼らは一つの移動率行列が与えられている場合に，これをもとに集計データ（年齢について集計されたデータ）のみが与えられている年次の移動率行列を推定する方法としてRAS法を提案しているが，結局将来についてはこうして得られた行列を固定して用いている．

たっては維持しがたい仮定ではあるが，他地域の同時推計としてはやむを得ない仮定であろう.[22] したがってここでの主要な問題はマルコフ行列$\Lambda(n)$を決定することである.[23] もしある時点tでj地域において年齢階級〔$(n-1)h$, nh〕に生存していて，$t+h$においてi地域に移動した人口のデータ $p_{ij}^{n+1}(t+h)$ がわかっていれば，

$$\lambda_{ij}(n) = p_{ij}^{n+1}(t+h)/l(n,\ t)\ \ p_j^n(t)\ , \qquad (6.6)$$

によって$\lambda_{ij}(n)$は推定される．しかしこうしたミクロデータがない場合には，与えられたT期間にわたるマクロデータ $p_i^n(t)$, $p_i^{n+1}(t+h)$, $t=0, h, 2h, \cdot\cdot, Th$ に対して，二乗平均誤差

$$\sum_{k=0}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left[u_i^{n+1}(kh+h)-\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}(n)\,u_j^n(kh)\right]^2 , \qquad (6.7)$$

が最小となるように$\lambda_{ij}(n)$をきめることができる．ただし，ここで$u_j^n(t)$は人口分布ベクトルであり，

$$u_i^n(t)=p_i^n(t)/\sum_{i=1}^{N}p_i^n(t)\ , \qquad (6.8)$$

で与えられる。このとき（6.7）を最少化する$\lambda_{ij}(n)$は自動的に条件（6.5）を満たすが，非負になるとは限らない．したがってもし負の推定値が出現した場合はその値を零とし，（6.5）を条件として，（6.7）の最小化問題を解く必要がある.[24] また Rogers（1968）[25] が示しているように，二次計画法（quadratic programming）によって解くこともできる．しかしこうしたマクロデータからの間接的推定法は，一般にその精度が悪いとされているから，何らか他のデータからの情報によってこれを補足修正する必要があろう．日本の県別人口を例にとれば，10年ごとにセンサスから人口移動のミクロデータが得られるから，それらによって推定値がどのような範囲に収まるべきかなのかある程度判断することができよう．また$S(n,\ t)$がきまれば，出生率行列$M(n, t)$は，

---

22) このような仮定は推計のための全くアドホックな形式的仮定であって，人口移動がマルコフ的であるかという実体人口学上の検討は別になされる必要があろう．ここでいうマルコフ性とは，各個人の移動確率がその年齢と現在地のみに依存していて移動歴の影響を受けないという仮定である．したがってこのとき一つの地域の同一年齢の人口集団（コーホート）は人口学的に同質（homogeneous）であると仮定されている．こうした仮定はこれまでの多くの多次元生命表やIIASA モデルの基本的前提であったが，それが制限的であることは明らかであり，何らかの形で人口の異質性（heterogeniety）を導入する試みがなされてきている．例えば以下を見よ． Jan M. Hoem, "Inhomogeneous Semi-Markov Processes, Select Actuarial Tables, and Duration-Dependence in Demography, in T. N. E. Greville ed., *Population Dynamics*, 1972, pp.251－296, Ralph B. Ginsberg, "Timing and Duration Effects in Residence Histories and Other Longitudinal Data I-Stochastic and Statistical Models", *Regional Science and Urban Economics* 9, 1979, pp.311－331, "──, II-Studies of Duration Effects in Norway, 1965－1971", 同上, pp.369－392. Dimiter Philipov and Andrei Rogers, "Multiregional Population Projections by Place of Previous Residence", in K. C. Land A. Rogers eds., *Multidimensional Mathematical Demography*, Academic Press, 1982, pp.445－475, Douglas A. Wolf, *The Multistate Life Table with Duration-Dependence*, Working Paper WP-87-46, 1987, IIASA, Laxenburg, Austria, Jacques Ledent and Andrei Rogers, Stable Growth in Native-Dependent Multistate Population Dynamics, 1987, forthcoming in *Mathematical Population Studies*.

23) マルコフ行列の要素推定の問題については多くの研究がすでになされている．たとえば以下を参照せよ．森村英典，高橋幸雄，『マルコフ解析』，日科技連，1979, Lee, T. C., G. G. Judge and A. Zellner, Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data, North-Holland, 1970.

24) 前掲 森村・高橋 (1979) (注23), p.287 参照.

25) Andrei Rogers, *Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution*, University of California Press, 1968, p.42.

$$M(n,t)=\frac{l(1,t)}{2}\hat{L}(1)[F(n,t)+F(n+1,t)S(n,t)],\quad (6.9)$$

によって与えることができる．ただしここで $l(1,t)$ は関係式

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^1(t+h)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{\omega} m_{ij}(n,t)\,p_j^n(t),\quad (6.10)$$

を維持するための時変パラメータであり，$F(n)$ の対角要素には各地域の出生率の想定値が投入される．e をすべての要素が1であるような N 元ベクトルとし，$<, >$ を N－ベクトルの内積を表すとすれば，$l(1,t)$ は，

$$l(1,t)=\langle e, p^1(t+h)\rangle/\langle e, b^n(t)\rangle,\quad (6.11)$$

$$b^n(t)=\sum_{n=1}^{\omega}[F(n,t)+F(n+1,t)S(n,t)]\,p^n(t)/2,$$

で与えられる．そこで $\hat{L}(1)$ としては

$$\sum_{k=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[p_i^1(kh+h)/\langle e, p^1(kh+h)\rangle-\sum_{j=1}^{N}\hat{l}_{ij}(1)\,b_j^n(kh)/\langle e, b^n(kh)\rangle]^2\quad (6.12)$$

を最小化するようなマルコフ行列を選べばよい．

ここで示したような方策は推計のための形式的な方法というべきであって，本来，生命表理論や連続体モデルに表現される人口学的な実質を捨象した現象論的段階にとどまっているといえよう．この分野における先駆者であったAndrei Rogersがその1968年の著書（注25）の立場を捨てて，多地域生命表の理論へむかったのは人口学の発展過程からすれば極めて自然なことである．本節で示した方法は Rogers の1968年の著書の立場に沿うものであって，発展段階からすれば一種の「先祖返り」である．しかし生命表から計算された固定レートによるプロジェクションは，生命表分析と同様に既知のデータを分析するためのものといってよいから，予測（forecast）のためのパラメータ時変モデルを作製することとの間には立脚点におおきな相違がある．多次元の人口推計をおこなおうとする場合，状態間推移確率に対する仮定によって以下の三つのケースが考えられる．すなわち，(1)過去のデータから推計された推移確率を固定しプロジェクション（projection）をおこなう，(2)推移確率の時間的変動に対して先見的な仮定をおいてシナリオ分析をおこなう，(3)推移確率の時間的変動を他の社会経済変数との関連のもとで予測し，人口予測（population forecast）をおこなう．ここで推計として望ましいのは(3)のケースと一般には考えられようが，状態間の推移確率は伝統的に人口学の対象であった出生率や死亡率に比較すれば往々にして時間的変動がはげしく，これらを他の社会経済変数との相互連関の下で予測することは実際上大変に困難である．こうした要因を含んだ多次元推計は，伝統的な人口推計におけるパラメータの変動範囲やトレンドの堅牢性というメリットを失ってしまうであろう．また状態数がおおければ意味のあるシナリオを設定することですら実行は困難となる．しかし人口予測の一つの重要な役割は，推移確率の変更を促すような政策的介入（intervention）に対して何らかの「動機付け」を与える点にあり，その意味では現状の推移の帰結を見ようとするプロジェクション（ケース1）でも十分に意味があると考えられよう．今日においてなお我々は人口の将来推計や人口移動論の領域においては十分な理論的基礎を欠いているから，本節で示したような便宜的手段を利用することも必要であろう．

On the Parameter Estimation Problems in the Multiregional Demographic Growth Model

Hisashi INABA

During the past decade, multidimensional demographic technique has been widely developed. In general, multidimensional models intend to describe the dynamics of populations which are divided into subpopulations according to "states" of individuals. The states may correspond to region of residence, labor status, marital status or other classifications. The projection process of a multidimensional population is formulated by the generalized Leslie model. One of main problems in multidimensional demography is the parameter estimation problem that is, how to estimate the parameters used in the models from observable statistics. As for the generalized Leslie model, this problem was given a solution using multistate life table technique by Rogers (1975), Willekens and Rogers (1978). After that, it has been pointed out by several authors that their method for estimation has some shortcomings.

In this paper, we critically prove the formulas of Ledent-Rogers-Willekens. In contrast to the above mentioned authors, our procedure does not depend on multiregional life table technique but on direct discretization of the continuous-time model. Here our main purpose is not to provide new results but to clear the conditions under which these methods for estimating the parameters can be applied. Finally, we give another method of calculation of parameters, which makes it possible to do a consistent disaggregated projection when we have already had an aggregated population projection.