人口問題研究 第三卷 第四號

調査研究

人口のロヂスチック曲線について

中川友長

一

ケトレーはその「人間に就いて」Sur l'homme et le developpement de ses facultés. Essai de physiqve sociale に於て、人口の增加に關し次の如く述べて居る。

「マルサス氏は、人口がその增加するに際し當面する主なる障碍をするどく解剖した。氏は又、人口が大なる損害に陥ることなくしては超え得ないであらう限界をやはり見事に決定した。然しながら、このイギリスの學者及び彼に倣へる經濟學者達の研究にも拘らず、障碍の作用する樣式は明かにされてゐないと認めなければならない。それに則つて障碍が作用するところの法則は決定されてゐない。一言にして云へば、人口の理論をそれが特に屬すべきものと思はれる數學の領域へ移す手段を人々は與へなかつたのである。(この點に就いて、私が一八二七年に科學史の公開講義の初めに述べた見解を想起するのを許されたい。『自然科學が進歩すればするほど益々數學の領域に入る傾きがあることを注意せねばならない。數學を一種の中心として自然科學は集り來るのである。一の科學が計算を以て取り扱はれる容易さの大小により、その科學がどの點まで完成されたものであるかを判斷することさへも出來るであらう。』)それがために、この微妙な點に關する論議は今日までのところ完成されてゐないし、且つ等比級數的な恐るべき速度を以て進む惡に對する障碍の作用の中に十分な保證を見出さぬことによつて社會が冒す危險をば恐らく誇張したといふ結果になつてゐる。

かく重要な缺陷を充たすため私は多くの研究に從事した。然しここにその研究の詳細を述べるのは不必要であらう。そしてその問題の狀態に就いての注意深い檢討は、人口の理論は次の三原理に要約し得ることを私に證明した。私は、この二原理を人口の發達とそれに影響を及ぼす諸原因の分析に對し基本的な原理として以後役立つべきものと考へてゐる。即ち、

人口は等比級數的に增加する傾向がある。

人口の發達に對する抵抗若くは障碍の總和は、總て他の事情にして同一ならば、人口の增加せんとする速度の二乘に比例する。

それ故に、人口增加の速度に對する障碍は、實際に環境がそれを横ぎる物體に對置せしむる抵抗の如くに作用する。この物理學の一法則が敷衍されて社會的資料に應用される場合に最もよく確められると云ふことは、多くの場合に、物質的現象を規律する法則と人間に關する法則との間に存する類似の一の新らしい例を提供するものである。從つて、私が人口の數學的理論の基礎とする二つの原理の中で、一は普通總ての經濟學者によつて認容されてをり、異論の餘地が殆んどないやうに思はれる。そして他の一つは、人口の動きと繼續的に作用する障碍とを考察せねばならなかつたところの一切の適用に於て確められてゐる。

然しながら、吾々がこれらに對して有する有利な臆測にも拘らず、もしこれらを分析に附した際最も微妙な點まで進められた試驗に堪へ得ぬならば、勿論これを棄てねばならないであらう。

それ故に、私は何よりも先づ理論の到達すべき歸結を檢討せねばならないと考へた。そしてその歸結が實驗の結果と全く一致するのを見て滿足した。かくて、人口が自由に障碍なく發達し得る時はそれは等比級數的に增加する。もしも人口の發達がそれを止むる傾向あり、且つ一樣に作用するあらゆる種類の障碍の中に行はれたとせば、換言すれば社會狀態が變化しないなら、人口は無限には增加せずして漸次停滯的となる傾向がある。」

(平、山村兩氏譯、岩波文庫上卷　二五五―二五七頁)

かく述べて居るが、ケトレーは人口增加の數學的方式そのものについては何等與へては居らぬのである。これはケトレーと同時代で、彼の知人であつたベルールスト P. F. Verhulst がその數式化を試みて呉れた爲であつたかも知れない。ベルールストはエコール・ミリテエルの數學教授であつて、此の數式化に關する論文を三つも書いて居るが、これは長い間一般の

注意する所とならなかつた。ユールはこの理由として、ベルールストが時代の非常な先驅者であつたこと及び當時利用し得る統計資料が不充分であつて、彼の見解を多少なりとも有效に檢討することが可能な狀態になかつたことを擧げて居る(引用書一四頁)が恐らくさうであつたのであらう。

一九二〇年にジョンス・ホプキンス大學の教授パールとリードとがベルールストの業績と獨立に、その人口增加に關する研究に於て再びベルールストと正に同じ結果に到達したのである。パールとリードによる此の再發見竝にこれに關する二人の研究に對して、ユールは「人口理論にとつて最大の重要性と興味とを有するものである」(一五頁)と云つて居る。パール自身も此の結果を極めて高く評價して次の如く述べて居る。「之は我々にとつて、控へ目に言つても、遊星が楕圓軌道を動くとするケプラーの法則によくなぞらへ得るものであると思はれる。併しそれは此の楕圓軌道の說明としてニュートンが附加した引力に當る說明の要素を缺いて居るのである。同樣に之はクラーク・マックスウエルの分子運動說以前のボイルの法則にもなぞらへ得るものである。約言すれば、前章に用ひた數學又は本章に於ける其の有效なる應用に現はれた何ものも我々の得た描寫曲線(人口增加の軌道)に關する前提第五(「人口增加の各成長期又は一循環中に於ける人口增加率は時間的に一定ではない。そのかはり事件の相次ぐ經過は明かに一般的に然かも實に殆んど普遍的に生じて居る。當初人口は緩徐に增して行くが、其の率はそれが最大値に達する所の一定點迄常に增加する。此の點は所與の土地に於ける人口と生活資料との間の最適關係點を示すものと推定することが出來やう。增加の最高率を示す此の點は人口增加曲線の彎曲點である。此の點を過ぐれば增加率は累減し、遂には曲線が問題となつて居る特定の成長期及び土地に所屬する上方漸近線に密接して殆んど

水平に伸びる迄に至るのである。」といふ前提）の背後にかくされた諸原因の本質に關しては些少の暗示も與へるものではないのである。之等諸原因の發見に導く方向にこれ迄爲された一つの確實な歩みは、之等の諸原因が人類に特有な事情、例へば人間社會の經濟的又は社會的構造又は組織といふやうなものではないといふ證明がなされたことである。之はかの曲線を以て果蠅ヅロソフイラ•メラノガスターの集團増加が正確に描寫されるといふ實驗上の證明を以て立證されて居る。此のことは此の探究が生物學的な、物理的な又は化學的な一層基礎的な自然的原因に向けられなければならぬことを示して居る。此の分野に於ける更に進んだ研究が有效に試みらるべき方向は、人口を資料とする統計的進路に沿つてではなく、より下等な生物集團が統御された狀況下で研究し得る所の實驗的進路に沿つて存在するらしく思はれる。」（II 五八五頁）

さてベルールストは如何にしてケトレーの人口増加に關する命題を數式化したかといふにそれは次の如くである。但し以下はユールの紹介せる所に據れるものである。（I 四二—四五頁）

tを時變量、pを人口とすれば、人口が一定率を以て自由に増加せる場合は明かに

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = m$$

として卽ち瞬間増加率は一定値mに等しとして表示される。

然かるに一定の地域、一定の生活條件の下に於ては人口は何日迄もmなる増加率で増加し續けることは出來ないといふケトレーの所謂抵抗若くは障害の總和の作用は、之が人口増加と共に増大するといふ人口の函數である所から

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = m - f(p)$$

又は

$$dp/dt = mp - \Phi(p)$$

として表らはされる。

ここで問題は此の$\Phi(p)$なる函數の形を如何に定めるかといふことである。ケトレーは前掲した如く「人口の發達に對する抵抗若くは障害の總和は、總て他の事情にして同一ならば、人口の増加せんとする速度の二乘に比例する」と述べて居る。之から指示せらるる所は問題の$\Phi(x)$をpの二乘値の一定數倍卽ち

$$\Phi(p) = np^2$$

と定めることである。此の定め方について、ユールは之は$\Phi(p)$に與へらるる形の中最も單純なるものであると述べて居る。（I 四三頁）

かくして得られた微分方程式

$$dp/dt = mp - np^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

は一應ケトレーの要件を具備したものであるといふことが出來る。

(1) 式を解けば

$$\frac{1}{p}e^{-\int -m\,dt} = C - \int -ne^{-\int -m\,dt}\,dt$$

$$p = \frac{e^{mt+\alpha}}{C + n\int e^{mt+\alpha}\,dt}$$

$$= \frac{e^{mt+\alpha}}{C + ne^{\alpha}\left(\frac{1}{m}e^{mt} + A\right)}$$

C、α、Aは何れも積分常數を表示する。

今 $C/e^{\alpha} = B$ と置けば

$$p = \frac{e^{mt}}{B + \frac{n}{m}e^{mt} + nA}$$

$$= \frac{me^{mt}}{mB + ne^{mt} + mnA} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$t = o$ のときに於ける p を p_0 とすれば

$$p_0 = \frac{m}{m(B + nA) + n}$$

であるから

$$B + nA = \frac{m - np_0}{mp_0}$$

でなければならぬ。よつて此の關係により(2)式に書き直せば

$$p = \frac{mp_0e^{mt}}{np_0e^{mt} + m - np_0}$$

を得る。之はベルールストの與へた人口增加式であつて、ベルールストは之を佛蘭西（一八一七年乃至一八三一年）、白耳義（一八一五年乃至一八三三年）、エセックス州（一八一一年乃至一八三一年）の各人口に試み、極めて良好な一致をみたのである。（Ｉ四三頁）尙ベルールトは此の式の p が t の變化に伴つて描く曲線をロヂスチツク曲線と命名したのである。（ロヂスチツク Logistic は λογίζομαι より導かれた語で計算する、勘定するの意味を持つといふ）

併し最近に於ては上記(1)式に於ける m を α 分の一、同じく np^2 即ち $\Phi(p)$ を $p^2/\alpha L$（α 及び L は共に常數）と定むる方法がとられて居る。之はベルールストのものと本質的に變つたことを行へるものではないが、之により結果をもつと簡單に表現することが出來る效果がある。即ち之により(2)式の m 及び n を置換へれば、α 分の一なる因子は(2)式右邊の分母子に共通に現はれるから之を消去して

$$p = \frac{e^{t/\alpha}}{B + e^{t/\alpha}/L + A/\alpha L}$$

$$= \frac{Le^{t/\alpha}}{LB + e^{t/\alpha} + A/\alpha}$$

$LB + \dfrac{A}{\alpha} = e^{\beta/\alpha}$ と置けば

$$p = \frac{L}{1 + e^{(\beta - t)/\alpha}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を得る。之が現在用ひられて居るロヂスチツク曲線又は人口のロヂスチツク規律の形式である。此の式から t が無限大となるとき p は L となることが判かる。即ち L は極限人口の大さに一致するのである。又 t が β の値をとるとき P は此の極限人口の大さの丁度半分の大さとなるが、(3)式を t で二回微分したものは

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{2p}{L}\right)$$

となつて、之は P が L の半値に等しいとき零となるから t が β なる點はロヂスチツク曲線の彎曲點となる。更に t が $\beta + h$ なる時點に於ける人口 $p_{\beta+h}$ は

$$p_{\beta+h}=\frac{L}{1+e^{-h/a}}=L-\frac{L}{1+e^{h/a}}$$
$$=L-p_{\beta-h}$$

となるからロヂスチック曲線は其の彎曲點を中心として左右對稱型であることが判かる。

さて、前記(1)式に於ける m も n も共に負數ではないのであるからロヂスチック曲線は人口が動き出すや否やその增加率は漸減し始めるものとして導かれて居る。此の點はベルールスト自身が明かに述べて居る。卽ち彼は人口が良地を見出すの困難に逢著し始めた時期を想像せよと言ひ、此の時期に於ける人口を零時點に於ける人口とし之を b で表はすのである。此の b なる大さの人口は彼によつて正常的人口と名付けられて居る。此の時期から人口增加上の障害が始まるのであつて、從つて人口增加と共に增大する此の障害の總和は之を f (p－b) なる函數として表現される。卽ち此の障害作用が始まる直前の人口瞬間增加率の大さを l であるとすれば、障害作用の始まれる以後の人口瞬間增加率は

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=l-f(p-b)$$

と表はされるとするのである。此の f なる函數は p が b の大さであるときには零、p が b より大なる場合には常に p が大なる程大きい正値をとるものであるとする。p が b より小なる場合に關しては考へないのである。蓋し若し此の小なる場合についてそれは常に p が小なる程小なる負値をとるものであるとすれば、人口增加率は過去に溯る程大となることになつて b が正常的人口の大さであることの意義が失はれることになる。ユールが示して居る如く(I 四四頁)若し此の f を其の最も簡單なる形として n(p－b) であると定むれば

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=l-n(p-b)$$

となり、m＝l＋nb と置けば

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=m-np$$

となつて、(1)式と同じものになつてしまふ。詮り增加率が m なる時に戾つて、此の時の人口を正常的人口として議論を立て直さなければならぬことになつて來る。從つて f の形を p が b より小なる場合に及んで定義しやうとすればそれは常に p が小なる程大なる正値をとるとせねばならぬ。卽ち例へば f は三角函數から構成されるものとせねばならぬ。此の場合常に p が小なる程大なる負値をとるものと定むることは出來ない。それはさうすれば零時點前に l よりも大きな增加率を示す時點があることになつて前提と矛盾して來ることになるからである。

パールは別に人口瞬間增加率に對して

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=f(t)\,(k-p)$$

なる形を與へて居る(II 五七二頁)が、此の f(t) は時間變量の函數であるから之を適當に定めれば之によりかの正常的人口前の時期に迄適合することが出來る。勿論上式に於ける k は前式に於ける l と同じ意味のものではなく、之は極限人口の大さに該當する量である。上式は

$$\frac{dp}{p\,(k-p)}=f(t)\,dt$$

と出來るから、此の兩邊を積分すれば

$$\frac{1}{k}\log\frac{mp}{k-p}=\int f(t)\,dt$$

$\frac{1}{k}\log m$ は積分常數である。上式の左邊は

$$-\frac{1}{k}\log\frac{k-p}{mp}$$

に等しいから

$$F(t)=-k\int f(t)\,dt$$

と置けば

$$(1+me^{F(t)})\,p=k$$

$$\therefore\quad p=\frac{k}{1+me^{F(t)}}$$

を得る。

パールは $F(t)=a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdots+a_nt^n$ とし（a_2 a_3 $\cdots\cdots$ a_n の盡くが零なる場合は所謂ロヂスチック曲線式となることは說明を要せぬであらう）而して此の x^4 以上の頃の係數が何れも零なる場合の統計資料による k m a_1、a_2、a_3 の決定方法（但し此の中 m は之を e の a_0 乘と置いて a_0 を求めることにする）を與へて居る（II 五七六—五七頁）が、之は次の如く相當手のかかる計算を要するものである。決定すべき量の種類が五つであるから此の計算には等間隔時點に於ける五つの人口を要する。此の人口を時の順序に y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 と表示すれば、先づ k の値は

$$y_1^4y_3^4(k-y_0)(k-y_2)^6(k-y_4)=y_0y_2^6y_4(k-y_1)^4(k-y_3)^4$$

なる方程式を解いて得らるk の値である。之は k の八次式の根を求める計算になる。

次に a_0 a_1 a_2 a_3 の値は此の k 値及び下記 $\beta_1\beta_2\beta_3$ なる各値を用いて次の關係式から計算されるのである。

$$a_0=\log\frac{k-y_0}{y_0}$$

$$a_1=\frac{18\beta_1-9\beta_2+2\beta_3}{6t_1}$$

$$a_2=\frac{4\beta_2-5\beta_1-\beta_3}{2t_1^2}$$

$$a_3=\frac{\beta_3+3\beta_1-3\beta_2}{6t_1^3}$$

但し

$$\beta_1=\log\frac{k-y_1}{y_1}-\log\frac{k-y_0}{y_0}$$

$$\beta_2=\log\frac{k-y_2}{y_2}-\log\frac{k-y_0}{y_0}$$

$$\beta_3=\log\frac{k-y_3}{y_3}-\log\frac{k-y_0}{y_0}$$

である。

上記 F(t) の t^2 以上の項の係數が全部零、卽ち所謂ロヂスチック曲線の場合には以上の計算は簡單化されるが、之は本稿末尾に附記したるが如くである。

以上はロヂスチック曲線の進行方向を逆に溯つての考察であるが、之と反對に進行方向に沿つて進む場合についてローヅから修正意見が提起されて居る。ローヅは極限人口の到達後に於て人口は減退に轉ずる傾向のあることが現實に知られて來たのであるから、ロヂスチック曲線に於て人口は極限人口に達したる後は之に靜止するとされて居る點は修正せられねばな

らぬとして、人口増加率の方程式として次の形を提案して居る(Ⅲ四一頁)。下式に於けるpは人口、tは時間變量、α及びLはパラメーターである。

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{\alpha}\sqrt{1-\frac{p}{L}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

前記(1)式のmをα分の一、αを$\frac{1}{\alpha L}$と置けば(1)式は

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{\alpha}\left(1-\frac{p}{L}\right)$$

となるからロヂスチックとローヅの式とは右邊の一マイナスL分のpといふ因子を其の平方根とするか否かの點を異するのみである。

ローヅの式を解いてpを求めてみれば次の如くである。

$$\frac{1}{\alpha}dt = \frac{dp}{p\sqrt{1-p/L}}$$

$$\frac{t}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \log\frac{\sqrt{1-p/L}+1}{-\sqrt{1-p/L}+1}, \quad -\frac{\beta}{\alpha} = \text{integr. Const.}$$

$$\frac{\beta-t}{\alpha} = \log\frac{-\sqrt{1-p/L}+1}{\sqrt{1-p/L}+1}$$

$$e^{\frac{\beta-t}{\alpha}} = \frac{-\sqrt{1-p/L}+1}{\sqrt{1-p/L}+1}$$

$$\sqrt{1-p/L}\left(1+e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\right) = 1-e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}$$

$$1-p/L = \left(\frac{1-e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}{1+e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}\right)$$

$$p/L = \frac{4e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}{\left(1+e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\right)}$$

$$= \left(\frac{2}{e^{-\frac{\beta-t}{2\alpha}} + e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}\right)^2$$

$$= \operatorname{sech}^2\frac{\beta-t}{2\alpha}$$

$$\therefore \quad p = L\operatorname{sech}^2\frac{\beta-t}{2\alpha}$$

此の曲線はtの負値が小となるに伴ひ零から漸次増大し、tがβの値をとるとき極大値Lに達し、爾後はtの増加と共に減小するのであつて、tがβなる點を中心として對稱型を呈する。

ローヅは此の曲線を一八七一年乃至一九三一年各十年の英蘭及び威爾斯人口に當篏し、最大誤差一・六％に止まる結果を得て居る。更にローヅはチャールズ女史の計算に係る英蘭及び威爾斯の將來人口の趨移を參酌して、(4)式は更に之を

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \sqrt{a+bp+cp^2}$$

と定むるを適當とするとなし、之より人口增加式としては

$$\frac{1}{p} = a + be^{nt} + ce^{-rt}$$

が妥當するとして居る。(Ⅲ四五―四七頁)但し上式中のrは實數でも虛數でもよい。

ローヅの曲線はロヂスチックと其の瞬間増加率に對して與へらるる阻止因子(前揭(1)式に於けるnpに該當するもので、之をユールは retarding function と稱して居る)を何う定めるかを異にするのみで、從つて其の成り立ちは之を全く同一にするものではあるが、此の阻止因子の定め方に於ける極限人口の持續を許すと許さぬの差は根本的な相違であつて、從つてケトレーの命題の重要部分はローヅの曲線に於ては失はれて居る。人口が最大人口に達した後に減退に轉ずるといふ現象は、之が最近現實に現はれた範圍に於ては、心理的な因子の作用に其の原因を有して居る。ケトレーの述ぶる「社會狀態が變化しないなら、人口は無限には增加せずして漸次停滯的となる傾向がある」といふ「社會狀態」の中に此の心理的な因子が含まれるならば、それは變化しないといふ假定の中に含まれることになるから其の限りローヅの曲線は考慮に入つて來ないであらう。併しかくの如き假定は現實に徴して餘りにも勝手な假定であり、其の結果は理論の遊戲に過ぎぬものであると言はねばならぬ。又、若し「社會狀態」の中に此の心理的な因子が含まれぬとすれば、それは重要な因子の存在を忘れて居ると言はねばならぬ。

以上よりしてロヂスチツク曲線は生活の物的資料生產に一定の限界があり、而して心理的な因子をも含めた一切の事情が不變なる場合に於て、ベルールストの所謂正常的大さに達したる後に於ける人口の增加形態を與ふるものであることが明になる。かくの如き前提條件が實現する人口場合が無いといふことは出來ず又ある人口增加の特定期間については屢々實現すべきことを認めねばならないであらうが、一般的にみて、之が完全なる實現は人口ではなく、他の下等なる生物の集團場合について期待されることは言ふを俟たぬ所である。ベインス Athelstane Baines はロヂスチツク曲線に對し、デイツケンズのユウジイン・ウレイバアンが蟻と蜜蜂の例を以て罵しられたのに對し兩足生物として主義に於て抗議せると同一の趣旨を以て抗議して居る(Ｉ六一頁)ことは大に理由のある所と言はねばならぬ。

デイユルフエは出產力は社會各層を通じて同一の大さを有しないといふ事實に立脚してロヂスチツク曲線は一つの極限型として成立つものであるとして居るが(Ⅳ三七—三九頁)、之もロヂスチツク曲線に於ける上記の缺陷に觸れる一つの事項であると考へられる。デイユルフエが論ずる所の概要は次の如くである。簡單の爲に社會層の種別を二つとし、其の一方の人口をN_1、他をN_2を以て表らはし、更に其の出產力をN_1についてはζ_1、N_2についてはζ_2となし、而して時間變量をtとすれば

$$\frac{dN_1}{dt} = [\zeta_1 - \gamma_1(h_1N_1 + h_2N_2)]\,N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = [\zeta_2 - \gamma_2(h_1N_1 + h_2N_2)]\,N_2$$

である。デイユルフエは上式のγやhについてそれが何を表示するかを明示して居らないが、上式右邊括弧內の第二項は死亡率に該當するものであると考へられるから之からγ及びhの性質は推定される。

さて上式を次の如く變形し

$$\frac{d\log N_1}{dt} = \zeta_1 - \gamma_1(h_1N_1 + h_2N_2)$$

$$\frac{d\log N_2}{dt} = \zeta_2 - \gamma_2(h_1N_1 + h_2N_2)$$

其の第一式にγ_2を乘じたものから第二式にγ_1を乘じたものを減ずれば

$$\gamma_2\frac{d\log N_1}{dt} - \gamma_1\frac{d\log N_2}{dt} = \zeta_1\gamma_2 - \zeta_2\gamma_1$$

$$\gamma_2 d\log N_1 - \gamma_1 d\log N_2 = (\zeta_1\gamma_2 - \zeta_2\gamma_1)\,dt$$

$$\therefore\quad \frac{N_1^{\alpha}}{N_2^{\alpha}} = Ce^{(\zeta_1\gamma_2 - \zeta_2\gamma_1)t}$$

但しCは積分常數である。

ここでディユルフェは上式の e の羃は、最大の確率を以て、零ではないと考へられるから之を正値となるやうにとれば t が無限大となるに從つて N_1 が無限大となるか又は N_2 が零とならねばならぬと論ずる。併し N_1 が無限大となるといふことは初めに立てた N_1 の微分方程式と矛盾することになるから N_2 が零に近付くといふことが事實とせられねばならぬ。然るに N_2 が零に近付くといふ極限場合には初めに立てた方程式は

$$\frac{dN_1}{dt} = \zeta_1 N_1 - \gamma_1 h_1 N_1^2$$

となり、之を解けば

$$N_1 = \frac{\dfrac{\zeta_1}{h_1\gamma_1}}{1 + \dfrac{c_1\zeta_1}{h_1\gamma_1} e^{-\zeta_1 t}}$$

を得るが之はロヂスチック曲線式に他ならぬものであるといふのである。

ロヂスチック曲線の計算方

前掲(3)の形に於けるロヂスチック曲線のパラメーターL、γ及びβを統計資料により定むる方法としてユールは三種を擧げて居る。(ー四九ー五三頁)以下には此のユールの三方法を示すことにする。

第一法

時間的に等間隔(此の間隔を時の單位にとる)にある三つの人口を時の順序に從つて P_0、P_1、P_2 とする。さうすればロヂスチック曲線の定義から次の三式が定められる。

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{L}(1 + e^{\beta/\alpha})$$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{L}(1 + e^{(\beta-1)/\alpha}).$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{1}{L}(1 + e^{(\beta-2)/\alpha})$$

今

$$d_1 = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} = \frac{1}{L}e^{\beta/\alpha}(1 - e^{-1/\alpha})$$

$$d_2 = \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{L}e^{(\beta-1)/\alpha}(1 - e^{-1/\alpha})$$

とすれば

$$e^{1/\alpha} = d_1/d_2$$

が導かれ、之よりαの値が定められる。又

$$d_1^2/(d_1 - d_2) = \frac{1}{L}e^{\beta/\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

であるから之より

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{P_0} - \frac{d_1^2}{d_1 - d_2}$$

が導かれLの値が定まる。αとLとの値が定まるからには之を(1)式に入れてβを求めることが出來る。

第二法

所與の等間隔時に於ける人口系列を三等分し、各群別に人口の逆數値を合計した値を S_1、S_2、S_3 とする。即ち

$$S_1 = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_1} + \cdots + \frac{1}{P_{r-1}}$$

$$S_2 = \frac{1}{P_r} + \frac{1}{P_{r+1}} + \cdots + \frac{1}{P_{2r-1}}$$

$$S_3=\frac{1}{P_{2r}}+\frac{1}{P_{2r+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{P_{3r-1}}$$

此のS_1、S_2、S_3はロヂスチック曲線の定義により

$$S_1=\frac{r}{L}+\frac{C}{L}e^{\beta/\alpha}$$

$$S_2=\frac{r}{L}+\frac{C}{L}e^{(\beta-r)/\alpha}$$

$$S_3=\frac{r}{L}+\frac{C}{L}e^{(\beta-2r)/\alpha}$$

但し

$$C=\frac{1-e^{-r/\alpha}}{1-e^{-1/\alpha}}$$

之より

$$D_1=S_1-S_2=\frac{c}{L}(1-e^{-r/\alpha})e^{\beta/\alpha}$$

$$D_2=S_2-S_3=\frac{c}{L}(1-e^{-r/\alpha})e^{(\beta-r)/\alpha}$$

が導かれ、更に之より

$$e^{r/\alpha}=D_1/D_2$$

が導かれ、αの値が定められる。又

$$D_1^2/(D_1-D_2)=\frac{C}{L}e^{\beta/\alpha}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

であるから

$$\frac{r}{L}=S_1-\frac{D_1^2}{D_1-D_2}$$

であつて、之からLの値が定められる。以上のα及びL値を用ひ、(2)式によつてβ値が定められる。

第三法

$$\frac{P_{t+h}-P_t}{P_t}=\frac{e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}-e^{\frac{\beta-t-h}{\alpha}}}{1+e^{\frac{\beta-t-h}{\alpha}}}=\frac{e^{\frac{\beta-t-h}{\alpha}}(e^{\frac{h}{\alpha}}-1)}{1+e^{\frac{\beta-t-h}{\alpha}}}$$

$$=(1-\frac{P_{t+h}}{L})(e^{\frac{h}{\alpha}}-1)$$

であるから人口の增加割合はP_{t+h}に對し$(e^{h/\alpha}-1)/L$なる傾斜をなす直線を現はすのである。よつて此の增加割合を統計資料により計算し、之に增加割合の計算せられた間隔の終りの時點にたつ人口P_{t+h}を變量とする直線を最小自乘法等の方法により當篏し、此の結果によつてα及びL値を定める。次に用ひられた人口の全系列の各項の逆數値を合計すれば、其の値Sは

$$S=\frac{r}{L}+\frac{C}{L}e^{\beta/\alpha},\ C=\frac{1-e^{-r/\alpha}}{1-e^{-1/\alpha}}$$

であるから、之に前に得たα及びL値を入れてβ値が定められる。但しrは系列の項數を示す。

二

人口增加規律を與ふるものとしてみたるときロヂスチック曲線は少くとも上述の如き缺陷を有するのである。併し此の曲線がはつきりと斷はつて又は含蓄的に持つて居る前提條件內では此の曲線が人口增加規律を與ふることを認めねばならない。即ちかかる前提の妥當する特定人口の特定期間

内に於ける増加については此の曲線の示すが如き動きが示されるし、又此の前提が續く限りに於ては之による其の將來人口の計算も可能となるのである。從つて問題は特定の人口増加場合に對して此の前提が成り立つて居るかどうかにかかり、此の判定がロヂスチック曲線の活用についての重要事項となる。此の判定は人口の現實の動きに對するロヂスチック曲線の適合度によつて一應行ひ得る。

パールはジャバの一七八〇年乃至一九二〇年の人口について此のロヂスチック曲線を計算し、(II 六二七頁)其の結果を上記年次外の年次に迄擴張して居るが、之によれば曲線の方程式は

$$p = 1.572 + \frac{49.140}{1 + 28.847\, e^{-0.0356t}}$$

であつて、此の式の與ふる人口と其の實際値とを揭ぐれば次の如くである。但し實際値は一八六〇年乃至一九三〇年の分は Statistisch Zakbaekje voor Nederlandsch Indie 1939, 9.5 所載の數字に據り、他はパールの揭ぐる所のものに據つたものである。

ジャバの人口(百萬人單位)

年次	ロヂスチックによる計算値	實際値
一七〇〇年	一・六二	
一七二〇年	一・六七	
一七四〇年	一・七七	
一七六〇年	一・九八	
一七八〇年	二・三九	二・〇二
一七九〇年	二・七四	
一八〇〇年	三・二二	
一八一〇年	三・八九	三・七七
一八二〇年	四・八二	
一八三〇年	六・〇八	
一八四〇年	七・七六	
一八四五年	八・七九	九・五四
一八五〇年	九・九六	
一八六〇年	一二・七四	一二・六七
一八七〇年	一六・一一	一六・四五
一八八〇年	一九・九九	一九・八〇
一八九〇年	二四・二四	二三・九二
一九〇〇年	二八・六一	二八・七五
一九〇五年	三〇・七五	三〇・三七
一九一〇年	三二・八二	
一九二〇年	三六・六五	三四・九八
一九三〇年	三九・九四	四一・七二
一九四〇年	四二・六四	
一九五〇年	四四・七七	
一九六〇年	四六・三九	
一九七〇年	四七・六一	
一九八〇年	四八・四九	
一九九〇年	四九・一四	
二〇〇〇年	四九・六〇	
極限値	五〇・一七	

上記の二數字系列の示す所によれば適合度は良好であつて、パールが「實際と理論間の吻合は優秀 excellent である。補外人口も合理的なものとなつて居る」(II 六二七頁)と稱して居るのは誇張ではない。パールの此の計算當時には一九二〇年迄の實際人口が判明し、上表に記した一九三〇年の數字は判かつて居らなかつたのである。併し最近年次に於て其の以前に

比し適合度が少しく低下して來て居る點が注目される。

最近年次に至つて此の適合度を著しく不良となし、かの前提條件の變化を示すに至つたと考へられる一つの例にフイリツピン群島の人口がある。バールは一八〇〇年から一九〇三年に至るフイリツピン人口を對象としてロヂスチツク曲線を計算したのであるが、その結果得たる曲線の方程式は

$$p = 0.285 + \frac{10.060}{1 + 6.951 e^{-0.0255t}}$$

であつて、（II 六二九頁）此の式が與ふる人口と其の實際値（伊藤隆「比律賓の人口構成と文化」地理學第九卷第十及び第十一に據る。但し一八八五年及び一八九四年竝に括弧を附したるものについてはパールの揭ぐる數字に據る）とを示せば次の如くである。

フイリツピンの人口（百萬人單位）

年次	ロヂスチツクによる計算値	實際値
一七〇〇年	〇・三九七	
一七二〇年	〇・四七〇	
一七四〇年	〇・五八九	
一七六〇年	〇・七八一	
一七八〇年	一・〇八五	
一八〇〇年	一・五五〇	一・五〇三（一・五六一）
一八一〇年	一・八六〇	
一八一二年	一・九二九	一・九三三
一八一九年	二・一九〇	二・一〇六
一八二〇年	二・二二九	
一八二九年	二・六一四	二・五九三
一八三〇年	二・六六〇	
一八四〇年	三・一五三	三・〇九六
一八五〇年	三・七〇三	三・八五七
一八五八年	四・一七七	四・二九〇
一八六〇年	四・三〇〇	
一八七〇年	四・九二七	四・七一二
一八七七年	五・三七七	五・五六八
一八八〇年	五・五六八	
一八八五年	五・八八六	五・八三九
一八八七年	六・一八〇	五・九八五
一八九〇年	六・二〇〇	
一八九四年	六・四四六	六・四九一
一八九六年	六・五六九	六・二六一
一九〇〇年	六・八〇四	
一九〇三年	六・九七八	七・六三五（六・九八八）
一九一〇年	七・三六五	
一九一八年	七・七七六	一〇・三一四
一九二〇年	七・八七五	
一九三〇年	八・三一五	
一九三九年	八・六六三	一六・〇〇〇
一九四〇年	八・六九七	
一九五〇年	九・〇一九	
一九六〇年	九・二八六	
一九七〇年	九・五〇四	
一九八〇年	九・六七九	
一九九〇年	九・八二三	
二〇〇〇年	九・九三五	
二〇二〇年	一〇・〇九五	
二〇四〇年	一〇・一九三	
二〇六〇年	一〇・二五三	
二〇八〇年	一〇・二九〇	

二一〇〇年	一〇・三一二
極限値	一〇・三四五

以上にみる如く一九〇〇年に入つてからの適合度は全然不良であつて、既に一九一八年に極限人口に近い値が示されてしまつて居る。尤もパールの計算當時に於ては一九〇三年迄の人口が判明し、其の中で一九〇三年の分はあやしいのであるが、一九一八年及び一九三九年の數字は全然判かつて居らなかつたのである。而して一八九〇年代迄の所では吻合は大體良好のものとなつて居つて、パール自身は「曲線と實際人口間の吻合は非常に密である、より以上の適合は望み得ないであらう」（Ⅱ六二九頁）と稱して居るが、之は多少誇張的である。

以上の如き適合の缺除が生ずる場合には人口は新らしい循環期に入つたのであるとして、適合の不良が生じ出した邊りから以後の年次に對しては別のロヂスチック曲線を考へればよいといふことにされて居る。（一八九六年乃至一九三九年の人口によつてロヂスチック曲線を計算してみると

$$p = 54.7/(1 + e^{\frac{3.52452 - t}{1.73058}})$$

を得て、極限人口には五千四百七十萬となる）併し之は新規の條件が中々固定せず可變的であつたり、又は固定するとしても前述ベルールストの正常人口狀態の實現に迄至る前に於ては之にロヂスチック曲線を良好な適合度をもつて當て嵌めることは期待出來ないのであつて、かかる期間についてはロヂスチック曲線は之を斷念せねばならぬ。

終はりに參考として計算結果が良き適合度を示せるビルマ、濠洲及びニユージーランドの現在に至る人口及びロヂスチック曲線による其の將來人口を掲ぐれば次の如くである。

ビルマの人口（百萬人單位）

年次	ロヂスチックによる計算値	實際値
一八一一年	〇・一	
一八三一年	〇・四	
一八五一年	一・四	
一八七一年	三・五	
一八八一年	五・四	三・七
一八九一年	七・七	七・七
一九〇一年	一〇・〇	一〇・五
一九一一年	一二・一	一二・一
一九二一年	一三・七	一三・二
一九三一年	一四・七	一四・七
一九四〇年	一五・三	
一九五〇年	一五・七	
一九六〇年	一六・〇	
極限値	一六・三	

$$p = \frac{16.27}{1 + e^{\frac{0.09118 - t}{0.85272}}}$$

濠洲の人口（百萬人單位）

年次	ロヂスチックによる計算値	實際値
一八一一年	〇・三	
一八三一年	〇・六	
一八五一年	一・〇	
一八七一年	一・七	
一八八一年	二・六	二・三
一八九一年	二・九	三・二

一九〇一年	三・六	三・八
一九一一年	四・五	四・六
一九二一年	五・四	五・四
一九三一年	六・五	六・五
一九三三年	六・七	六・六
一九四〇年	七・五	
一九五〇年	八・七	
一九六〇年	九・八	
極限値	一五・六	

$$p = \frac{15.64}{1+e^{\frac{3.16449-t}{8.44323}}}$$

ニュージーランドの人口(百萬人單位)

年次	ロヂスチックによる計算値	實際値
一八一六年	〇・一	
一八二六年	〇・二	
一八三六年	〇・二	
一八四六年	〇・三	
一八五一年	〇・三	〇・〇
一八五六年	〇・四	
一八五八年	〇・四	〇・一
一八六一年	〇・四	〇・一
一八六四年	〇・四	〇・二
一八六七年	〇・四	〇・二
一八七一年	〇・五	〇・三
一八七四年	〇・五	〇・三
一八七六年	〇・五	
一八七八年	〇・五	〇・四
一八八一年	〇・六	〇・五
一八八六年	〇・六	〇・六
一八九一年	〇・七	〇・六
一八九六年	〇・八	〇・七
一九〇一年	〇・九	〇・八
一九〇六年	〇・九	〇・九
一九一一年	一・〇	一・〇
一九一六年	一・一	一・一
一九二一年	一・二	一・二
一九二六年	一・三	一・三
一九三六年	一・五	一・五
一九四〇年	一・六	
一九五〇年	一・八	
一九六〇年	二・〇	
極限値	三・四	

$$p = \frac{3.43}{1+e^{\frac{3.18294-t}{4.29840}}}$$

引用書

I. G.U. Yule : The Growth of Population and the Factors which control it. Jou. Roy. Stat. Soc. Part 1, 1925.

II. R. Pearl : Studies in Human Biology, 1924.

III. E.C. Rhodes : A Population Growth Curve for England and Wales, Actualités scientifiques et industrielles, No. 710.

IV. Dieulefait : Sur la fonction logistique. Actualités scientifiques et industrielles, No. 710.