

Working Paper Series (J)

No.5

出生力のコーホート・モデルとピリオド・モデル

鈴木 透

2002年6月

国立社会保障・人口問題研究所



1 2 6 7 4 2



国立社会保障・人口問題研究所

〒100-0011 東京都千代田区内幸町 2-2-3 日比谷国際ビル 6F

No.5

出生力のコーホート・モデルとピリオド・モデル

鈴木 透

2002年6月

出生力のコーホート・モデルとピリオド・モデル

鈴木 透

本稿では、出生力指標のコーホート対ピリオド関係に関する基礎的モデルについて考察する。テンポ変化のみのモデルとしては、Bongaarts-Feeney に代表される線型水平シフト・モデルと、Ryder モデルから派生する線型垂直シフト・モデルを扱う。カンタム変化のみのモデルとしては、やはり Ryder モデルから派生する線型モデルと、指数関数的変化モデルを検討する。線型水平シフトと指数関数的カンタム変化を組み合わせた独立効果モデルを、Ryder モデルと比較する。最後に各モデルにおいて、Ryder 指標や Bongaarts-Feeney の ATFR がどのようなふるまいをするのか分析する。

TFR (Total Fertility Rate; 合計出生率) のようなピリオドの出生力指標が、*CFR* (Complete Fertility Rate; 完結出生率) のようなコーホート出生力の指標とどのような関係にあるかは、Ryder によって早くから扱われてきた。Ryder(1964)は両者の関係を人口学的翻訳 (demographic translation) と呼び、*TFR* と *CFR* の関係を与える翻訳公式 (translation formula) を示した。*TFR* と *CFR* は平均出生児数を表すカンタム指標 (quantum measure) だが、両者の関係は出生スケジュールに依存する。そこで翻訳公式には、テンポ指標 (tempo measure) として平均出生年齢が最低限登場する。さらに必要に応じて、分散や 3 次モーメントといったより高次のモーメントを考慮する場合がある。最も一般的な形では、*TFR* はコーホートのモーメントを用いた多項式で表される (Ryder, 1964, p. 76; van Imhoff, 2001, p. 60; Keilman, 2001, p. 373)。

Ryder のモデルはコーホート出生力を独立変数とし、それによってピリオド出生力が決まるコーホート・モデルである。最も基礎的な翻訳公式では、*TFR* が *CFR* とコーホートの平均出生年齢の変化率で表される (Ryder, 1964, p. 76)。これに対し Bongaarts and Feeney(1998)は、ピリオド出生力を直接扱うモデルを提示した。その目的はテンポ変化の影響を調整した *TFR* を求めることで、コーホート出生力を求めることではないとしている (Bongaarts and Feeney, 2000, p. 561)。しかし彼らの仮定の下で、*CFR* がどのような値をとるかは簡単に決定できる。本稿では、Ryder モデルとは逆に、ピリオド出生力によってコーホート出生力が決定されるモデルをピリオド・モデルと呼ぶことにする。

一般に仮定が強いほど、モデルは単純になる。最も単純なのは、安定人口のように年齢別出生率が一定不変の場合である。しかしこれでは全ての出生力指標がコーホートとピリオドの間で一致し、翻訳問題は存在しない。人口学的翻訳に関するモデルで最も単純なのは、カンタム指標かテンポ指標の一方が不変で他方が規則的に (たとえば時間に関し線型に) 変化する場合である。Bongaarts-Feeney モデルでは、ピリオドの平均出生年齢だけが一定の速度で変化する。他方、出生スケジュールは完全に固定され、カンタム指標だけが規則的に変化するモデルも考えられる。次の段階は、カンタム指標もテンポ指標もある規

則的な仕方で変化するモデルである。Ryder の線型モデルは、このクラスに属する。

本稿では人口学的翻訳モデルを段階的、体系的に取り上げ、比較検討する。各モデルの目的は、カンタム指標やテンポ指標のコーホート=ピリオド間関係を与えることである。これはモデル内部で与えられる関係だが、ひとつ上の次元としてコーホート・モデルとピリオド・モデル間の関係についても考察する。両者の関係はいわば逆関数に当たるが、式の形はほとんど同じで、一部の符号が入れ替わるだけである(Keilman, 1994, p. 344)。

本稿ではモデル自体の考察に加え、各モデルで Ryder のテンポ指標や Bongaarts-Feeney の調整 TFR がどのような振る舞いをするかも検討する。なお、本稿で扱うモデルは通常の年齢別出生率に基づく加法的なモデルのみで、パリティ別女子人口を分母とする生起率に基づくモデル(Keilman, 1994; Kohler and Ortega, 2000 など)は対象外である。

以下の記号法は、主として Keilman(1994)を参考にした。定積分の範囲は省略するが、当該コーホートや当該年の再生産期間を包含する年齢範囲について積分するものとする。もちろん再生産期間外では、 $m_c(T,x)$ も $m_p(t,x)$ も 0 とする。式の導出は付録に示す。

x	年齢
$t=T+x$	年次
$T=t-x$	コーホートの出生年次
$m_c(T,x) = m_p(T+x,x)$	コーホートの出生スケジュール
$m_p(t,x) = m_c(t-x,x)$	ピリオドの出生スケジュール
$CFR(T) = \int m_c(T,x) dx$	コーホートの完結出生率
$TFR(t) = \int m_p(t,x) dx$	ピリオドの合計出生率
$\mu_c(T) = \int x m_c(T,x) dx / CFR(T)$	コーホートの平均出生年齢
$\mu_p(t) = \int x m_p(t,x) dx / TFR(t)$	ピリオドの平均出生年齢

I. テンポ変化のみのモデル

ここではカンタム指標が一定で、平均出生年齢が時間に対し線型に変化する二種類のモデルを扱う。ひとつは、年齢別出生率を形状が一定のまま水平方向に一定の速度でシフトするもので、これを線型水平シフト・モデルと呼ぶ。もうひとつは Ryder の線型モデルからカンタム変化を除去したもので、年齢別出生率の規則的な上下動を仮定することから、線型垂直シフト・モデルと呼ぶ。

I-1. 線型水平シフトのコーホート・モデル

このモデルでは、コーホートの年齢別出生率が一様に水平方向にシフトすると仮定する。稲葉(1986)はシフトが一定期間続いた後で停止する場合を扱ったが、ここでは永遠にシフトが続く状態を想定する。当然平均出生年齢も同じ速度でシフトするので、1年当たりのシフト幅は μ_c' で表せる。 T 年生まれコーホートの年齢別出生率は、次のように基準コーホ

ートから μ_c' T 年ずれる。

$$m_c(T, x) = m_c(0, x - \mu_c' T). \quad (\text{I -1-1})$$

単なる水平シフトなので、 CFR は変化しない。再生産期間にある全コーホートが (I -1-1) に従っていれば、 TFR は CFR の $1/(1+\mu_c')$ 倍で一定となる (Kim and Schoen, 1999, p. 18; van Imhoff, 2001, p. 62)。¹

$$TFR = CFR / (1 + \mu_c'). \quad (\text{I -1-2})$$

仮定よりコーホートの平均出生年齢 $\mu_c(t)$ は時間に対し線型で、傾きは μ_c' である。van Imhoff (2001, p. 62) が述べるように、平均出生年齢のピリオド／コーホート比も $1/(1+\mu_c')$ になっている。従って $\mu_p(t)$ も時間に対し線型で、傾きは $\mu_c'/(1+\mu_c')$ である。

$$\mu_p(t) = \mu_c(t) / (1 + \mu_c'). \quad (\text{I -1-3})$$

$$\mu_p' = \mu_c' / (1 + \mu_c'). \quad (\text{I -1-4})$$

I -2. 線型水平シフトのピリオド・モデル

このモデルではピリオドの横断的出生スケジュールが、カンタムも形状も変えず水平方向に一定の速度 μ_p' でシフトする。これは Bongaarts-Feeney の仮定そのままである。

$$m_p(t, x) = m_p(0, x - \mu_p' t). \quad (\text{I -2-1})$$

カンタムのピリオド／コーホート比は、 $1-\mu_p'$ になる (Bongaarts and Feeney, 1998, p. 288; Kim and Schoen, 1999, p. 20)。この比は、平均出生年齢とその変化率にも当てはまる。

$$CFR = TFR / (1 - \mu_p'). \quad (\text{I -2-2})$$

$$\mu_c(t) = \mu_p(t) / (1 - \mu_p'). \quad (\text{I -2-3})$$

$$\mu_c' = \mu_p' / (1 - \mu_p'). \quad (\text{I -2-4})$$

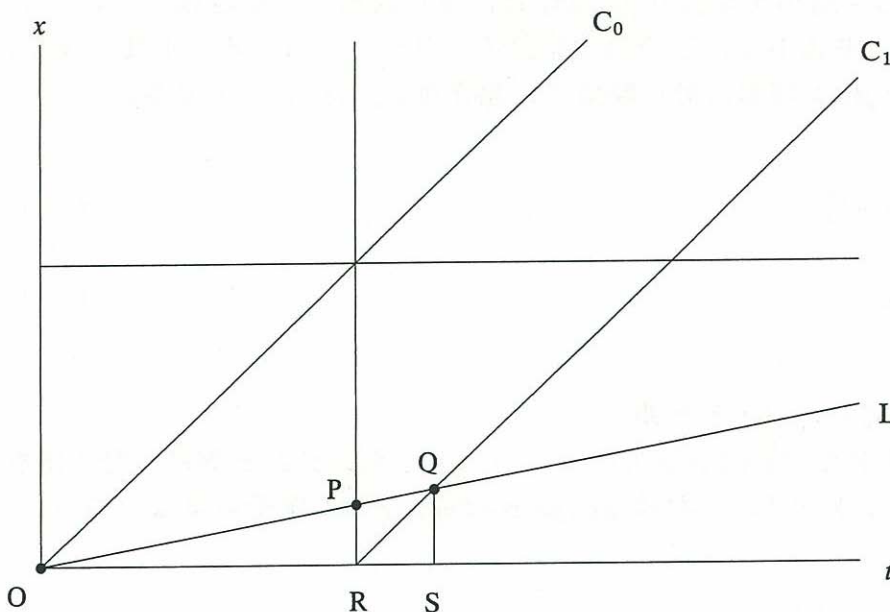
¹ 廣嶋は $TFR=CFR (1-\mu_c')$ になるとしているが (2000, p.34)、誤解である。

(I-2-4)を μ_p' について解くと、(I-1-4)に一致する。つまり線型水平シフトでは、カンタム比、テンポ比、テンポ変化率の比の全てが、同じ比によって支配されている。

$$\frac{\mu_p'}{\mu_c'} = \frac{1}{1+\mu_c'} = 1 - \mu_p'. \quad (I-2-5)$$

従って線型水平シフトでは、コーホート・モデルとピリオド・モデルは同値である(van Imhoff, 2001, p. 62)。つまりシフト・パラメタが μ_p' のピリオド・モデル(Bongaarts-Feeneyモデル)は、シフト・パラメタが $\mu_p'/(1-\mu_p')$ のコーホート・モデルに一致する。もちろんこれは全コーホートが同じシフト・パラメタに従う定常状態での話で、定常状態に至る過程はコーホート・モデルとシフト・モデルで異なる(Kim and Schoen, 1999, pp. 9-10)。

図 1. 線型水平シフト・モデルにおける出生スケジュールの対応



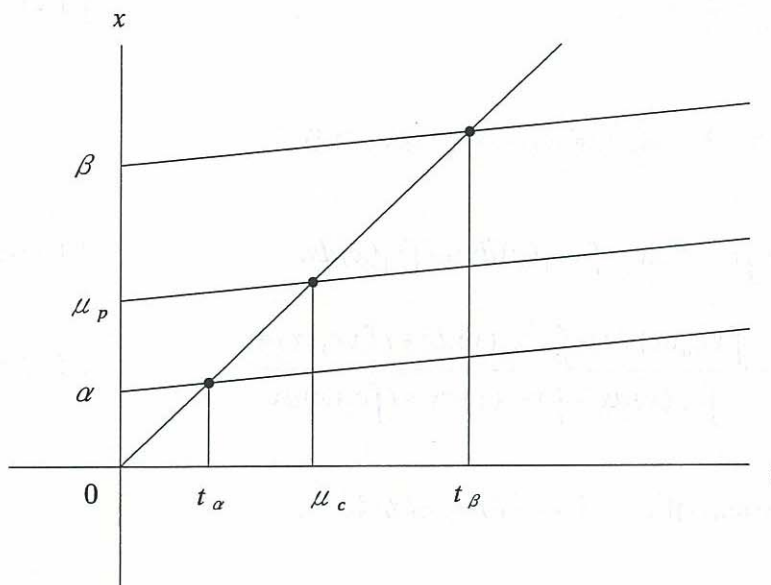
水平シフト・モデルのテンポ変化率の比の起源は、図1のレキシス図によって理解できる。点Oは、ピリオド間の対応では点Pに、コーホート間の対応では点Qに写される。直線Lの傾きは $\mu_p' = RP/OR$ だが、 $OR=1$ とすると高さ $RP = \mu_p'$ となる。点Qは傾き1の直線 C_1 と直線Lの交点だから、高さ $SQ = \mu_c' = \mu_p'/(1-\mu_p')$ となる。こうして水平シフト・モデルでは、 $\mu_p'/\mu_c' = 1 - \mu_p'$ で一定となる。

カンタム比 TFR/CFR が変化率の比に一致するのは、コーホートとピリオドの再生産期間の比が変化率の比に一致することによる。再生産の開始年齢 α と終了年齢 β の変化は、図2のように傾き μ_p' の直線によって表される。基準コーホート($T=0$)の生活線の方程式は $x=t$ だから、このコーホートの再生産開始年と終了年は、

$$(t_\alpha, t_\beta) = \left(\frac{\alpha}{1-\mu_p'}, \frac{\beta}{1-\mu_p'} \right)$$

従ってこのコーホートの再生産期間は $t_\beta - t_\alpha = (\beta - \alpha)/(1-\mu_p')$ で、ピリオドの $1/(1-\mu_p')$ 倍になっている。一般に T 年生まれのコーホートでは、 t_β と t_α がともに T 年ずれるだけなので、どのコーホートでも再生産期間はピリオドの $1/(1-\mu_p')$ 倍である。この再生産期間の引き延ばしが全ての年齢区間で均等に生じるため、 CFR も TFR の $1/(1-\mu_p')$ 倍になるのである。

図 2. 線型水平シフト・モデルにおける再生産期間と平均出生年齢



スケジュールの引き延ばしは、 α 歳以前にも作用している。従ってコーホートが出生した年のピリオドの平均出生年齢 μ_p は、コーホートの年齢では $\mu_c = \mu_p/(1-\mu_p')$ に写される。こうして μ_c も μ_p の $1/(1-\mu_p')$ 倍になる。

I-3. 線型垂直シフトのコーホート・モデル

もう一種類のテンポ変化のみのモデルは、Ryder(1964)の線型モデルから派生する。Ryderはコーホートの年齢別出生率が、年齢に関する未知の関数 $c_0(x), c_1(x), \dots$ を係数とする多項展開で表されると考えた。最も簡単な線型モデルの場合、 T に対し $CFR(T)$ は直線、 $\mu_c(T)$ は双曲線になる²。

² Ryder(1964)は離散型で定式化しているが、本稿では全てのモデルを連続型で表す。

$$m_c(T, x) = c_0(x) + c_1(x)T. \quad (\text{I -3-1})$$

$$CFR(T) = \int m_c(T, x) dx = \int c_0(x) dx + T \int c_1(x) dx. \quad (\text{I -3-2})$$

$$\mu_c(T) = \frac{\int x m_c(T, x) dx}{CFR(T)} = \frac{\int x c_0(x) dx + T \int x c_1(x) dx}{\int c_0(x) dx + T \int c_1(x) dx}. \quad (\text{I -3-3})$$

カンタム変化率が $\int c_1(x) dx$ であることは、(I-3-2)から明らかである。テンポ変化率は、次のようになる。

$$\mu'_c(T) = \frac{\int x c_1(x) dx - \mu_c(T) \int c_1(x) dx}{CFR(T)}. \quad (\text{I -3-4})$$

同様に $TFR(t)$ と $\mu_p(t)$ は、 t に対しそれぞれ直線と双曲線になる。

$$TFR(t) = \int m_c(t-x, x) dx = \int c_0(x) dx - \int x c_1(x) dx + t \int c_1(x) dx. \quad (\text{I -3-5})$$

$$\mu_p(t) = \frac{\int x m_c(t-x, x) dx}{TFR(t)} = \frac{\int x c_0(x) dx - \int x^2 c_1(x) dx + t \int x c_1(x) dx}{\int c_0(x) dx - \int x c_1(x) dx + t \int c_1(x) dx}. \quad (\text{I -3-6})$$

Ryder の翻訳公式(translation formula)は、(I-3-5)から導かれる。

$$TFR(t + \mu_c(t)) = CFR(t)(1 - \mu'_c(t)). \quad (\text{I -3-7})$$

ここで $\int c_1(x) dx = 0$ でカンタム変化をなくしたモデルを、退化 Ryder モデル T と呼ぶ。この条件を(I-3-4)に代入すると、テンポ変化は T に対し線型となることが分かる。

$$\mu'_c = \frac{\int x c_1(x) dx}{CFR}. \quad (\text{I -3-8})$$

廣嶋(2000, p. 36)や Keilman(2001, p. 373)の(A3)式にあるように、翻訳公式は退化して TFR は CFR の $1 - \mu'_c$ 倍で一定となる。ピリオドの平均出生年齢は t に対し線型だが、傾きは μ'_c でなく $\mu'_c / (1 - \mu'_c)$ になる。

$$TFR = CFR (1 - \mu'_c). \quad (\text{I -3-9})$$

$$\mu_p(t) = \mu_p(0) + \frac{\mu'_c}{1 - \mu'_c} t. \quad (\text{I -3-10})$$

$\mu_p(t)$ と $\mu_c(t)$ の関係は、次のようになる。

$$\mu_p(t) = \frac{\mu_c(t)}{1 - \mu'_c} - \frac{\int x^2 c_1(x) dx}{TFR}. \quad (\text{I -3-11})$$

Keilman(2001, p. 373)は、2次以上のモメントが全て不変と仮定した。この場合、 $k \geq 2$ について次が成り立つ。

$$\int x^k c_1(x) dx = 0, \quad k \geq 2. \quad (\text{I -3-12})$$

この仮定を導入した場合、(I-3-12)の右辺第2項は消え、テンポ指標間の関係は次のようになる。これはKeilmanの(A4)式に当たる。

$$\mu_p(t) = \frac{\mu_c(t)}{1 - \mu'_c}. \quad (\text{I -3-13})$$

(I-3-10)からも分かることだが、テンポ変化率間の関係は次のようになる。

$$\mu'_p = \frac{\mu'_c}{1 - \mu'_c}. \quad (\text{I -3-14})$$

I-4. 線型垂直シフトのピリオド・モデル

ピリオド・モデルはコーホート・モデルの、いわば逆関数の関係にある。ここではピリオドの年齢別出生率が、次のように t に対し直線的に変化すると仮定する。

$$m_p(t, x) = c_0(x) + c_1(x)t. \quad (\text{I -4-1})$$

コーホート・モデルの場合と同様にして、以下の式を導くことができる。

$$TFR(t) = \int m_p(t, x) dx = \int c_0(x) dx + t \int c_1(x) dx. \quad (\text{I -4-2})$$

$$\mu_p(t) = \frac{\int x m_p(t, x) dx}{TFR(t)} = \frac{\int x c_0(x) dx + t \int x c_1(x) dx}{\int c_0(x) dx + t \int c_1(x) dx}. \quad (I-4-3)$$

$$\mu'_p(t) = \frac{\int x c_1(x) dx - \mu_p(t) \int c_1(x) dx}{TFR(t)}. \quad (I-4-4)$$

$$CFR(T) = \int m_p(T+x, x) dx = \int c_0(x) dx + \int x c_1(x) dx + T \int c_1(x) dx. \quad (I-4-5)$$

$$\mu_c(T) = \frac{\int x m_p(T+x, x) dx}{CFR(t)} = \frac{\int x c_0(x) dx + \int x^2 c_1(x) dx + T \int x c_1(x) dx}{\int c_0(x) dx + \int x c_1(x) dx + T \int c_1(x) dx}. \quad (I-4-6)$$

$$CFR(t - \mu_p(t)) = TFR(t)(1 + \mu'_p(t)). \quad (I-4-7)$$

TFR が不変となる条件は $\int c_1(x) dx = 0$ で、コーホート・モデルと全く同じである。この条件を加えると、Keilman(2001, p. 376)が示すように、コーホート・モデルの鏡像が現れる。(I-4-9) と (I-4-10) は、Keilman の (A10) と (A11) 式に当たる。

$$\mu'_p = \frac{\int x c_1(x) dx}{TFR}. \quad (I-4-8)$$

$$CFR = TFR(1 + \mu'_p). \quad (I-4-9)$$

$$\mu_c(t) = \frac{\mu_p(t)}{1 + \mu'_p}. \quad (I-4-10)$$

$$\mu'_c = \frac{\mu'_p}{1 + \mu'_p}. \quad (I-4-11)$$

(I-4-11) を μ_p' について解くと、(I-3-14) に一致する。つまり線型垂直シフトでも、コーホート・モデルとピリオド・モデルは同値である。線型垂直シフトでは変化率の比は次のようになり、水平シフトの場合と符号が逆転する。

$$\frac{\mu'_p}{\mu'_c} = \frac{1}{1 - \mu'_c} = 1 + \mu'_p. \quad (I-4-12)$$

表 1 にここまでの結果をまとめた。テンポ変化のみのモデルでは、重要なのはテンポ変

化率のピリオド／コーホート比であり、これがカンタムとテンポのピリオド／コーホート比を支配している。ここで扱ったテンポ変化のみのモデルでは、CFRとTFRがともに不変となるが、この結果は一般的ではない。たとえば非線型水平シフトを考えると、コーホート・モデルではTFRが、ピリオド・モデルではCFRが変化してしまう³。

表 1. テンポ変化のみのモデルの比較

モデル	テンポ変化率	テンポ指標	カンタム指標
線型水平シフト	$\mu_p'/\mu_c' = 1 - \mu_p'$	$\mu_p/\mu_c = 1 - \mu_p'$	$TFR/CFR = 1 - \mu_p'$
線型垂直シフト	$\mu_p'/\mu_c' = 1 + \mu_p'$	$\mu_p/\mu_c = 1 + \mu_p'$	$TFR/CFR = 1/(1 + \mu_p')$

II. カンタム変化のみのモデル

カンタム変化のみのモデルについても、二種類のモデルを考察する。ひとつは線型垂直シフトと同様、Ryderの線型モデルから派生する退化Ryderモデルである。もうひとつは、線型水平シフトと同程度に単純な1パラメタ・モデルとして、CFRとTFRが指数関数的に変化するモデルを検討する。

II-1. 線型カンタム変化のコーホート・モデル

I-3の冒頭で考察したRyderの線型モデルで、コーホートの平均出生年齢 μ_c が一定とする。そのための条件は、(I-3-4)の右辺の分子が0になることだから、

$$\int x c_1(x) dx = \mu_c \int c_1(x) dx. \quad (\text{II-1-1})$$

このモデルを、退化RyderモデルQと呼ぶ。(I-3-2)と(I-3-5)で明らかのように、右辺の $\int c_1(x) dx$ はCFRとTFRの変化率だが、以後これを δ と表記する。

$$\delta = \int c_1(x) dx = CFR' = TFR'. \quad (\text{II-1-2})$$

(II-1-1)と(II-1-2)より、 $\int x c_1(x) dx = \delta \mu_c$ である。つまり $\int x c_1(x) dx$ は、退化RyderモデルTではカンタム指標×テンポ変化率だったが、この退化RyderモデルQではカンタム変化率×テンポ指標になる。

(I-3-7)の翻訳公式に $\mu_c' = 0$ を代入すると、 $TFR(T + \mu_c) = CFR(T)$ が残る。次の式はKeilman(2001, p. 375)では(A6)式に当たる。

³ たとえば $m_c(T, x) = m_c(0, x - \mu_c' T^2)$ のような2次関数的な水平シフトを考えると、 $TFR(t)$ は双曲線的に変化する。

$$TFR(t) = CFR(t - \mu_c) = CFR(t) - \delta \mu_c. \quad (\text{II -1-3})$$

ピリオドのテンポ指標 $\mu_p(t)$ は、次のようになる。

$$\mu_p(t) = \frac{\mu_c TFR(t + \mu_c) - \int x^2 c_1(x) dx}{TFR(t)}. \quad (\text{II -1-4})$$

Keilman は、コーホートの出生スケジュールが一定不変との仮定を導入した(2001, p. 374)。とりあえずコーホートの出生年齢の分散 σ_c^2 が不変と仮定すれば、 $\int x^2 c_1(x) dx$ は 2 次モメントの δ 倍になる。

$$\int x^2 c_1(x) dx = \delta(\sigma_c^2 + \mu_c^2). \quad (\text{II -1-5})$$

これを(II-1-4)に代入して整理すると、テンポ指標間の関係は次のようになる。これは Keilman の(A7)式と同値である。

$$\mu_p(t) = \mu_c - \frac{\delta \sigma_c^2}{TFR(t)}. \quad (\text{II -1-6})$$

このモデルではコーホートのテンポ変化を 0 にしたが、ピリオドのテンポ変化は残る。しかも(II-1-6)を微分すると、カンタムの増減に関係なくピリオドのテンポは常に晩産化するという驚くべき性質が明らかになる。

$$\mu_p'(t) = \left(\frac{\delta \sigma_c}{TFR(t)} \right)^2. \quad (\text{II -1-7})$$

II-2. 線型カンタム変化のピリオド・モデル

ピリオドの平均出生年齢 μ_p が一定であるための条件は、(I-4-4)の右辺の分子が 0 になることだから、

$$\int x c_1(x) dx = \mu_p \int c_1(x) dx. \quad (\text{II -2-1})$$

この条件を加えて、退化 Ryder モデル Q のピリオド版は次のようになる。(II-2-2)と(II-2-3)は、Keilman(2001, p. 376)の(A12)および(A13)と同値である。

$$CFR(T) = TFR(T) + \delta \mu_p. \quad (\text{II}-2-2)$$

$$\mu_c(T) = \mu_p + \frac{\delta \sigma_p^2}{CFR(T)}. \quad (\text{II}-2-3)$$

$$\mu'_c(T) = \left(\frac{\delta \sigma_p}{CFR(T)} \right)^2. \quad (\text{II}-1-4)$$

このように線型カンタム変化モデルでは、コーホートとピリオドの平均出生年齢を同時に不変とすることはできない。 μ_c を不変とすると μ_p の変化は残り、逆に μ_p を不変とすると μ_c の変化は残る。従ってコーホート・モデルとピリオド・モデルは同値ではない。

II-3. 指数関数的カンタム変化のコーホート・モデル

線型水平シフトに対応するカンタム変化モデルとして、指数関数的変化モデルを考える。このモデルはパラメタがひとつだけで年齢の関数ではないこと、結果が単純で明瞭であることにおいて、線型水平シフトに対置するのに相応しい。次のようにコーホートの年齢別出生率が、年齢に関係なく変化率 δ で指数関数的に変化すると仮定する。

$$m_c(T, x) = e^{\delta T} m_c(0, x). \quad (\text{II}-3-1)$$

この場合、 CFR は指数関数的に増減するが、コーホートの平均出生年齢は変化しない。実際、全年齢の出生率が一様に増減するため、平均に限らず 2 次以上のモメントも不変である。

$$CFR(T) = e^{\delta T} \int m_c(0, x) dx = e^{\delta T} CFR(0). \quad (\text{II}-3-2)$$

$$\mu_c(T) = \frac{e^{\delta T} \int x m_c(0, x) dx}{e^{\delta T} CFR(0)} = \mu_c(0). \quad (\text{II}-3-3)$$

TFR も CFR 同様、変化率 δ で指数関数的に変化する。このモデルでは、 μ_c とともに μ_p も不変になる。この点に関しては、線型モデルよりも単純である。

$$TFR(t) = \int m_c(t-x, x) dx = e^{\delta t} \int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx = e^{\delta t} TFR(0). \quad (\text{II}-3-4)$$

$$\mu_p(t) = \frac{\int x m_c(t-x, x) dx}{TFR(t)} = \mu_p(0). \quad (\text{II}-3-5)$$

翻訳公式 (II-3-6) は、コーホート・モデルにもかかわらず μ_p がパラメタとなっているのが特徴である。テンポ指標間の関係は、(II-3-7) のような級数展開で与えられる。

$$TFR(t) = CFR(t - \mu_p) = e^{-\delta\mu_p} CFR(t). \quad (\text{II-3-6})$$

$$\mu_p = \mu_c - \frac{\delta\sigma_c^2}{2!} + \frac{\delta^2\kappa_c^3}{3!} - \dots. \quad (\text{II-3-7})$$

II-4. 指数関数的カントム変化のピリオド・モデル

ピリオドの年齢別出生率が、年齢に関係なく指数関数的に変化すると仮定する。

$$m_p(t, x) = e^{\delta t} m_p(0, x). \quad (\text{II-4-1})$$

ピリオド・モデルは、次のようにコーホート・モデルの鏡像になる。

$$TFR(t) = e^{\delta t} \int m_p(0, x) dx = e^{\delta t} TFR(0). \quad (\text{II-4-2})$$

$$\mu_p(t) = \frac{e^{\delta t} \int x m_p(0, x) dx}{e^{\delta t} TFR(0)} = \mu_p(0). \quad (\text{II-4-3})$$

$$CFR(T) = \int m_p(T+x, x) dx = e^{\delta T} \int e^{\delta x} m_p(0, x) dx = e^{\delta T} CFR(0). \quad (\text{II-4-4})$$

$$\mu_c(T) = \frac{\int x m_p(T+x, x) dx}{CFR(T)} = \mu_c(0). \quad (\text{II-4-5})$$

$$CFR(T) = TFR(T + \mu_c) = e^{\delta\mu_c} TFR(T). \quad (\text{II-4-6})$$

$$\mu_c = \mu_p + \frac{\delta\sigma_p^2}{2!} + \frac{\delta^2\kappa_p^3}{3!} + \dots. \quad (\text{II-4-7})$$

表 2 に、カントム変化のみのモデルに関する結果をまとめた。ここで考察したモデルについては、 CFR と TFR の変化率は常に一致するが、この結果は一般的ではない。コーホートまたはピリオドの平均出生年齢が一定で、しかも CFR と TFR の変化率が異なるモデルを作ることができる⁴。線型カントム変化ではカントムの差が一定、指数関数的カントム変化ではカントムの比が一定となる。線型カントム変化では、コーホートとピリオドのテン

⁴ たとえば $m_c(T, x)$ が再生産期間 $[\alpha, \beta)$ 内で一定で、 $m_c(T, x) = CFR(0)/(\beta - \alpha) + \lambda T^2$ のように T の 2 次関数になっている場合、 $TFR'(t) = CFR'(t) - \lambda(\beta^2 - \alpha^2)/2$ となる。

ポを同時に固定できない。指数関数的カンタム変化では、コーホート・モデルではピリオドのテンポが、ピリオド・モデルではコーホートのテンポが翻訳公式に現れる。

表 2. カンタム変化のみのモデルの比較

モデル	カンタム変化率	カンタム指標	テンポ指標
線型：コーホート	$CFR' = TFR' = \delta$	$CFR(t) - TFR(t) = \delta \mu_c$	$\mu_c - \mu_p(t) = \delta \sigma_c^2 / TFR(t)$
線型：ピリオド	$CFR' = TFR' = \delta$	$CFR(t) - TFR(t) = \delta \mu_p$	$\mu_c(t) - \mu_p = \delta \sigma_p^2 / CFR(t)$
指数：コーホート	$CFR' = TFR' = \delta$	$TFR(t) / CFR(t) = \exp(-\delta \mu_p)$	$\mu_c - \mu_p \doteq -\delta \sigma_c^2 / 2$
指数：ピリオド	$CFR' = TFR' = \delta$	$TFR(t) / CFR(t) = \exp(-\delta \mu_c)$	$\mu_c - \mu_p \doteq \delta \sigma_p^2 / 2$

Ⅲ. 独立効果モデル

ここでは Ryder(1964)の線型モデルに対置すべきもうひとつの基礎的モデルとして、線型水平シフトと指数関数的カンタム変化を組合せたモデルを考える。このモデルは、テンポ変化のパラメタ μ_c' (ピリオド・モデルなら μ_p') とカンタム変化のパラメタ δ のふたつしか含まない。これらの変化は独立に進行するので、このモデルを「独立効果モデル」と呼ぶ。線型モデルでは負の出生率を生じる危険が付きまとうが、独立効果モデルはカンタム変化が指数関数的であるため、その危険をまぬがれている。またカンタムやテンポの変化率を直接設定できるので、シミュレーションの出発点としても有効だろう。

Ⅲ-1. 独立効果のコーホート・モデル

コーホートの年齢別出生率に対し、指数関数的カンタム変化と線型水平シフトが同時に進行しているとする。このときコーホートのカンタムとテンポは、 δ と μ_c' に従って独立に変化する。

$$m_c(T, x) = e^{\delta T} m_c(0, x - \mu_c' T). \quad (\text{Ⅲ-1-1})$$

$$CFR(T) = e^{\delta T} CFR(0). \quad (\text{Ⅲ-1-2})$$

$$\mu_c(T) = \mu_c(0) + \mu_c' T. \quad (\text{Ⅲ-1-3})$$

TFR の変化率は、 δ とともに μ_c' にも依存する。晩産化 ($\mu_c' > 0$) は、 TFR の変化速度を CFR よりも遅らせる効果がある。 $\mu_p(t)$ の変化は t に対し線型で、変化率 μ_p' はカンタム変化率 δ に影響されない。

$$TFR(t) = \exp\left(\frac{\delta}{1 + \mu_c'} t\right) TFR(0). \quad (\text{Ⅲ-1-4})$$

$$\mu_p(t) = \mu_p(0) + \frac{\mu'_c}{1 + \mu'_c} t. \quad (\text{III-1-5})$$

翻訳公式は(II-3-6)の自然な拡張で、 μ_p が不変でない点と、テンポ効果による TFR/CFR 比が入っている点が異なる。Ryder の翻訳公式 (I-3-7) との対応も明らかで、対応する CFR と TFR の間隔が $\mu_c(t)$ 年ではなく $\mu_p(t)$ 年に、テンポ効果が $1 - \mu'_c(t)$ ではなく $1/(1 + \mu'_c)$ になっている。 $\mu_c(t)$ の変化が線型である点は、Ryder モデルより単純である。

$$TFR(t) = \frac{CFR(t - \mu_p(t))}{1 + \mu'_c} = \frac{e^{-\delta\mu_p(t)} CFR(t)}{1 + \mu'_c}. \quad (\text{III-1-6})$$

III-2. 独立効果のピリオド・モデル

ピリオドの年齢別出生率に対し、指数関数的カンタム変化と線型水平シフトが同時に作用しているとする。このときコーホート・モデルの鏡像は、次のようになる。

$$m_p(t, x) = e^{\delta t} m_p(0, x - \mu'_p t). \quad (\text{III-2-1})$$

$$TFR(t) = e^{\delta t} TFR(0). \quad (\text{III-2-2})$$

$$\mu_p(t) = \mu_p(0) + \mu'_p t. \quad (\text{III-2-3})$$

$$CFR(T) = \exp\left(\frac{\delta}{1 - \mu'_p} T\right) CFR(0). \quad (\text{III-2-4})$$

$$\mu_c(T) = \mu_c(0) + \frac{\mu'_p}{1 - \mu'_p} T. \quad (\text{III-2-5})$$

$$CFR(T) = \frac{TFR(T + \mu_c(T))}{1 - \mu'_p} = \frac{e^{\delta\mu_c(T)} TFR(T)}{1 - \mu'_p}. \quad (\text{III-2-6})$$

IV. 基礎的モデルにおける出生力指標

ここでは本稿で考察した基礎的モデルで、 TFR 以外の特殊な出生力指標がどのような値をとるのかを検討する。Ryder (1980)による次の指標は有名で、日本では大谷(1993)や福田(1999)による計算例がある。

$$TI(t) = \int \frac{m_p(t, x)}{CFR(t-x)} dx. \quad (IV-1)$$

$$ACF(t) = TFR(t)/TI(t). \quad (IV-2)$$

$TI(t)$ はテンポ効果の指標で、 CFR が全コーホートで等しければ 1 になる。逆に言うと $TI(t) < 1$ であれば、 CFR が一定であれば t 年に起こるはずだった出生が遅れていることを表す。 ACF (Average Cohort Fertility) は、ピリオドの出生スケジュールによる CFR の調和平均だが (Ryder, 1980, p. 48)、コーホートについて標準化した出生スケジュールによる CFR の算術平均と解釈することもできる (Kim and Schoen, 1999, p. 7)。

Bongaarts and Feeney (1998)による $ATFR$ (Adjusted Total Fertility Rate) は、ピリオドの平均出生年齢の変化率で TFR を補正するものである。Ryder 指標と異なり、コーホート出生力に関する情報は全く必要としない。日本では別府 (2001)による計算例がある。

$$ATFR(t) = \frac{TFR(t)}{1 - \mu_p'(t)}. \quad (IV-3)$$

表 3 は、本稿で考察した 8 種類の基礎的モデルで、これらの指標がどのような値をとるかまとめたものである。Ryder 指標はどのモデルでもうまく行っており、テンポ変化がないモデルでは $TI(t)=1$ であり、ある場合には適切な値をとって $ACF(t)$ を CFR に一致させる。一方で $ATFR$ は線型垂直シフトと線型カンタム変化のコーホート・モデルではうまく行かず、意味不明の式を生じる。これは $ATFR$ が水平シフト型のメカニズムを前提としているため、これは Bongaarts-Feeney モデルを一般化した Kohler and Philipov (2000)のモデルでも同様である。

表 3. 基礎的モデルにおける出生力指標

モデル	$TI(t)$	$ACF(t)$	$ATFR(t)$
線型水平シフト	$1 - \mu_p'$	CFR	CFR
線型垂直シフト	$1/(1 + \mu_p')$	CFR	$\frac{CFR}{1 - \mu_p'^2}$
線型：コーホート	1	$CFR(t - \mu_c)$	$\frac{CFR(t - \mu_c)^3}{CFR(t - \mu_c)^2 - \delta^2 \sigma_c^2}$
線型：ピリオド	1	$CFR(t - \mu_p)$	$CFR(t - \mu_p)$
指数：コーホート	1	$CFR(t - \mu_p)$	$CFR(t - \mu_p)$
指数：ピリオド	1	$CFR(t - \mu_c)$	$CFR(t - \mu_c)$
独立：コーホート	$1 - \mu_p'$	$CFR(t - \mu_p(t))$	$CFR(t - \mu_p(t))$
独立：ピリオド	$1 - \mu_p'$	$CFR(t - \mu_c(t))$	$CFR(t - \mu_c(t))$

V. 結語

本稿では、人口学的翻訳に関する基礎的モデルを段階的に比較検討した。まずテンポ変化のみのモデルとして、Bongaarts-Feeney に代表される線型水平シフト・モデルと、Ryder モデルから派生する線型垂直シフト・モデルを比較した。このふたつのモデルでは、コーホート・モデルとピリオド・モデルは同値であることがわかった。つまり TFR/CFR 、 μ_p/μ_c 、 μ_p'/μ_c' といった全てのピリオド/コーホート比が、水平シフトでは $1-\mu_p'$ 、垂直シフトでは $1+\mu_p'$ (またはその逆数) に固定されている (表 1)。

テンポ変化のみのモデルと異なり、カンタム変化のみのモデルでは、コーホート・モデルとピリオド・モデルは同値でないことが明らかになった。線型カンタム変化モデルでは、コーホートとピリオドのテンポを同時に不変とすることはできない。指数関数的カンタム変化モデルの TFR/CFR 比は、コーホート・モデルでは μ_p に、ピリオド・モデルでは μ_c に依存する (表 2)。

近年の先進国の出生力研究では晩産化の影響が注目を集めており、このため Bongaarts-Feeney のようなテンポ変化のみのモデルはよく研究され、Kohler-Philipov による拡張も行われた。しかし本稿は、実用性よりも基礎的モデルの数学的関係を体系的に理解することに重点を置き、カンタム変化のみのモデルを同等の比重で取り上げた。その結果、これらのモデルに予想外の性質が見つかった。線型カンタム変化モデルでは、コーホートかピリオドいずれかの平均出生年齢を固定すると、他方は必ず晩産化することがわかった (II-1-7、II-2-4 式)。また指数関数的カンタム変化モデルでは、 CFR と TFR が一致するまでの年数が、コーホート・モデルではピリオドの平均出生年齢、ピリオド・モデルではコーホートの平均出生年齢に一致することが示された (II-3-6、II-4-6 式)。

カンタムとテンポがともに変化する基礎的モデルとしては Ryder の線型モデルがあり、特に翻訳公式 (I-3-7) は有名である。本稿ではこれに対置すべきもうひとつの基礎的モデルとして、線型水平シフトと指数関数的カンタム変化を組み合わせた独立効果モデルを提示した。その翻訳公式 (III-1-6) は、Ryder のものとよく似ている。テンポ効果は Ryder モデルの $1-\mu_c'(t)$ に対し独立効果モデルでは $1/(1+\mu_c')$ であり、線型水平シフトと線型垂直シフトの関係がそのまま現れている。

Bongaarts-Feeney 以降、晩産化による TFR の抑圧効果が注目を集めているが、その解釈には注意が必要だろう。晩産化の効果は、特定年の TFR を本来あるべきだった水準より引き下げるが、 TFR の変化の一次的原因ではない。Ryder モデルの場合、(I-3-5)式から明らかのように TFR の変化率は $\int c_1(x)dx$ で、 CFR の変化率に等しい。つまり TFR の変化をもたらしているのはあくまでカンタム変化で、テンポ変化は TFR の変化率には影響しない。独立効果モデルの場合、(III-1-4)式に見るように、晩産化はむしろ TFR の変化率を引き上げる (絶対値を下げる) 方向に働く。つまりテンポ効果とは、一時点の TFR の水準に関するもので、変化率に関するものではない。

本稿では扱った基礎的モデルの次の段階は、分散の変化を許容するモデルである。Foster(1990)のモデルは、基準コーホートの出生スケジュールから出発し最終的に TFR を導くコーホート・モデルだが、直線や指数関数のような規則的な変化は想定されていない。

モデルの目的は、基準値からの乖離を、カンタム効果・テンポ効果・スプレッド効果および残差に分解することで、効果の加法性が最大の特徴である。

Kohler and Philipov(2000)のモデルは、Bongaarts-Feeney モデルを拡張し分散の変化を導入したものだが、人口学的翻訳のモデルではない。Bongaarts and Feeney(1998)はコーホート出生力と無関係であると強調しながら、*TFR* の調整法 (IV-3 式) の根拠を *CFR/TFR* 比に求めていた。従って批判者達が、これを *CFR* の再現を目的とする人口学的翻訳モデルと考えたのは当然である (van Imhoff and Keilman, 2000; Kim and Schoen, 2000)。これに対し Kohler-Philipov モデルは、コーホート出生力に一切言及せず、出生タイミングが変化しなかった場合の *TFR* を導いている。彼らは一般的なモデルから出発しているが、それはあくまで水平シフトを一般化したもので、Ryder のような垂直シフト型のモデルは対象外である。また、実際に *ATFR* を求める際には、調整済みのピリオドの出生スケジュールに関し、平均は直線的に、分散は指数関数的に変化するという特殊な仮定が置かれる。そうした仮定にも関わらず、*ATFR* の推定法は反復推定を伴う複雑なものである。

置換水準を大きく下回る出生力のさらなる低下は、先進国に共通する問題である。*TFR* が 1.3 未満と定義される極低出生力 (lowest-low fertility) は、現在は南欧、中・東欧、旧ソ連圏に限られているが、今後東アジアにも広がる可能性がある (Kohler, Billari and Ortega, 2001, p. 6)。実際、国立社会保障・人口問題研究所の将来人口推計 (2002 年版) では、中位推計はかろうじて極低出生力をまぬがれるものの、低位推計では *TFR* は 1.1 まで低下するとされる。

将来人口推計では、あるコーホート以降は出生行動が一定として、安定人口へ向けて収束させている。しかし *TFR* の下限も底を打つ時期も不明瞭な現状では、独立効果モデルのようにコーホートの少産化と晩産化が延々と続くシナリオも現実味を帯びて来る。このような「不安定人口」において、出生力低下のパラメタが、将来の人口規模や増加率や年齢構造や絶滅時刻にどのように影響するのかといった解析的分析も、マクロ・シミュレーションとしての将来推計人口を補完する意味で重要だろう。

付録. 式の導出

(I-1-2)式

t 年の横断的出生スケジュールと t 年生まれコーホートの縦断的出生スケジュールの関係は、(I-1-1)式より $m_p(t,x)=m_c(t-x,x)=m_c(t,(1+\mu_c')x)$ である。ここで t 年生まれコーホートの年齢 ($t+x$ 年に到達する) を $X=(1+\mu_c')x$ と置くと、 $X'=1+\mu_c'$ となる。*TFR* は、(A-1)を t 年の再生産期間について積分して、置換積分法より、

$$TFR = \int m_c(t,(1+\mu_c')x) dx = \frac{\int X' m_c(t,X) dx}{X'} = \frac{\int m(t,X) dX}{1+\mu_c'} = \frac{CFR}{1+\mu_c'}$$

(I -1-3)式

$X=(1+\mu_c')x$ より $XX'=(1+\mu_c')^2 x$ となる。 t 年の原点周りの 1 次モメントは、

$$TFR \mu_p(t) = \int x m_c(t, (1+\mu_c')x) dx = \frac{\int XX' m_c(t, X) dx}{(1+\mu_c')^2} = \frac{\int X m(t, X) dX}{(1+\mu_c')^2} = \frac{CFR \mu_c(t)}{(1+\mu_c')^2}.$$

両辺を TFR で割り、(I -1-2)を適用して(I -1-3)を得る。

(I -2-2)式

コーホート・モデルとは逆に、コーホートの年齢別出生率をピリオドのそれで表すと、 $m_c(T, x) = m_p(T+x, x) = m_p(T, (1-\mu_p')x)$ となる。 T 年の横断的スケジュールの年齢を X 、 T 年生まれコーホートの年齢($T+x$ 年に到達する)を x と置くと、 $X=(1-\mu_p')x$ となり、以下の手順は (I -1-2)式の場合と同様である。(I -2-3)式も、(I -1-3)式と同様の手順で求まる。

(I -3-4)式

(I -3-3)より、

$$CFR(T) \mu_c(T) = \int x c_0(x) dx + T \int x c_1(x) dx.$$

$CFR' = \int c_1(x) dx$ であることに注意し、両辺を T で微分して整理する。

(I -3-7)式

(I -3-5)より、

$$\begin{aligned} TFR(t + \mu_c(t)) &= \int c_0(x) dx - \int x c_1(x) dx + (t + \mu_c(t)) \int c_1(x) dx \\ &= \left(\int c_0(x) dx + t \int c_1(x) dx \right) - \left(\int x c_1(x) dx - \mu_c(t) \int c_1(x) dx \right) \end{aligned}$$

第 1 のカッコは(I -3-2)より $CFR(t)$ 、第 2 のカッコは(I -3-4)より $CFR(t) \mu_c'(t)$ なので、これらを代入して整理する。

(I-3-9)式

(I-3-5)で $\int c_1(x)dx=0$ として、

$$TFR(t) = \int c_0(x)dx - \int x c_1(x)dx$$

この段階で TFR が t に依存しないのは明らかである。右辺第 1 項は $CFR(0)=CFR$ 、第 2 項は (I-3-8)より $\int x c_1(x) dx = CFR \mu_c'$ だから、これらを代入して整理する。

(I-3-10)式

(I-3-6)に $\int x c_1(x) dx = CFR \mu_c'$ を代入して、

$$\mu_p(t) = \frac{\int x c_0(x)dx - \int x^2 c_1(x)dx}{TFR} + \frac{CFR \mu_c' t}{TFR}$$

$t=0$ を代入すれば明らかなように、右辺第一項は $\mu_p(0)$ である。第 2 項には (I-3-9)を代入して整理する。

(I-3-11)式

$m_p(0,x) = m_c(-x,x)$ より、 $\mu_p(0)$ は、

$$\mu_p(0) = \frac{\int x m_c(-x,x)dx}{TFR} = \int x \frac{c_0(x)}{TFR} dx - \int x^2 \frac{c_1(x)}{TFR} dx$$

右辺第 1 項に (I-3-9)を代入して整理すると、

$$\mu_p(0) = \frac{1}{1-\mu_c'} \frac{\int x c_0(x)dx}{CFR} - \frac{\int x^2 c_1(x)dx}{TFR} = \frac{\mu_c(0)}{1-\mu_c'} - \frac{\int x^2 c_1(x)dx}{TFR}$$

これを (I-3-10)に戻して、

$$\mu_p(t) = \frac{\mu_c(0) + \mu_c' t}{1-\mu_c'} - \frac{\int x^2 c_1(x)dx}{TFR}$$

$\mu_c(t) = \mu_c(0) + \mu_c' t$ より (I-3-11) が出る。

(I-3-12)式

k 次モーメントが不変とは、次の等式が成り立つことを意味する。

$$\int x^k m_c(T, x) dx = \int x^k m_c(0, x) dx.$$

両辺に (I-3-1) を代入して整理する。

(II-1-4)式

(I-3-6) に $\int x c_0(x) dx = CFR(0) \mu_c$ と $\int x c_1(x) dx = \delta \mu_c$ を代入して、

$$\mu_p(t) = \frac{CFR(0) \mu_c - \int x^2 c_1(x) dx + \delta \mu_c t}{TFR(t)}.$$

(II-1-3) より $CFR(0) = TFR(0) + \delta \mu_c = TFR(\mu_c)$ であり、さらに $TFR(\mu_c) + \delta t = TFR(t + \mu_c)$ だから、整理して (II-1-4) になる。

(II-1-5)式

T 年生まれコーホートの出生年齢の 2 次モーメントは、

$$\sigma_c^2(T) + \mu_c^2 = \frac{\int x^2 c_0(x) dx + T \int x^2 c_1(x) dx}{CFR(T)} = \frac{(\sigma_c^2(0) + \mu_c^2) CFR(0) + T \int x^2 c_1(x) dx}{CFR(T)}.$$

ここで分散不変すなわち $\sigma_c^2(T) = \sigma_c^2(0) = \sigma_c^2$ とすると、

$$\int x^2 c_1(x) dx = \frac{CFR(T) - CFR(0)}{T} (\sigma_c^2 + \mu_c^2)$$

$CFR(T) - CFR(0) = \delta T$ だから、(II-1-5) が出る。

(II-1-6)式

(II-1-4)に(II-1-5)を代入すると、

$$\mu_p(t) = \frac{\mu_c TFR(t + \mu_c) - \delta(\sigma_c^2 + \mu_c^2)}{TFR(t)} = \mu_c \frac{TFR(t) + \delta\mu_c - \delta(\sigma_c^2 / \mu_c + \mu_c)}{TFR(t)}.$$

整理して(II-1-6)を得る。

(II-3-5)式

(II-3-1)および(II-3-4)より、

$$\mu_p(t) = \frac{\int x m_c(t-x, x) dx}{TFR(t)} = \frac{e^{\delta t} \int x e^{-\delta x} m_c(0, x) dx}{e^{\delta t} \int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx} = \frac{\int x e^{-\delta x} m_c(0, x) dx}{\int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx}.$$

分子は $TFR(0)\mu_c(0)$ 、分母は $TFR(0)$ であることから。

(II-3-6)式

上の式で $\mu_p(t)$ が不変であることが確認されたから、

$$-\mu_p = \frac{-\int x e^{-\delta x} m_c(0, x) dx}{\int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx} = \frac{\partial}{\partial \delta} \log \int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx. \quad (A-1)$$

一方、中間値の定理より $CFR(t-A)=TFR(t)$ を満たす年齢 A が存在するから、

$$\int m_c(t-A, x) dx = \int m_c(t-x, x) dx.$$

(II-3-1)より、

$$e^{-\delta A} \int m_c(0, x) dx = \int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx.$$

両辺の対数をとって、

$$-\delta A + \log CFR(0) = \log \int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx. \quad (\text{A-2})$$

両辺を δ で微分して、

$$-A = \frac{\partial}{\partial \delta} \log \int e^{-\delta x} m_c(0, x) dx. \quad (\text{A-3})$$

(A-1)と(A-3)から $A = \mu_p$ が言え、 A の定義より $CFR(t - \mu_p) = TFR(t)$ が言える。

(II-3-7)式

(A-2)に $\mu_p = A$ を代入して整理すると、

$$-\delta \mu_p = \log \int e^{-\delta x} \frac{m_c(0, x)}{CFR(0)} dx.$$

右辺がキュミュラント母関数であることから、

$$-\delta \mu_p = -\delta \mu_c + \frac{\delta^2 \sigma_c^2}{2!} - \frac{\delta^3 \kappa_c^3}{3!} + \dots.$$

両辺を $-\delta$ で割って(II-3-7)を得る。

(III-1-3)式

$X = x - \mu_c' T$ とする。 $m_c(0, x)/CFR(0)$ が基準コーホートの出生年齢の密度関数であることに注意して、

$$\mu_c(T) = \int x \frac{e^{\delta t} m_c(0, x - \mu_c' T)}{e^{\delta t} CFR(0)} dx = \int (X + \mu_c' T) \frac{m_c(0, X)}{CFR(0)} dX = E(X + \mu_c' T).$$

平均の性質より、(III-1-3)が出る。

(III-1-4)式

$$TFR(t) = \int m_c(t - x, x) dx = e^{\delta t} \int e^{-\delta x} m_c(0, (1 + \mu_c')x - \mu_c' t) dx.$$

ここで $X=(1+\mu_c')x-\mu_c't$ とすると、

$$\begin{aligned} TFR(t) &= \frac{e^{\delta t}}{1+\mu_c'} \int \exp\left(\frac{-\delta(X+\mu_c't)}{1+\mu_c'}\right) X' m_c(0, X) dx \\ &= \frac{1}{1+\mu_c'} \exp\left(\frac{\delta}{1+\mu_c'} t\right) \int \exp\left(-\frac{\delta}{1+\mu_c'} X\right) m_c(0, X) dX. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

$t=0$ とした場合との比較から、(Ⅲ-1-4)が言える。

(Ⅲ-1-5)式

$$TFR(t) \mu_p(t) = \int x m_c(t-x, x) dx = e^{\delta t} \int e^{-\delta x} x m_c(0, (1+\mu_c')x - \mu_c't) dx.$$

ここで $X=(1+\mu_c')x-\mu_c't$ とすると、

$$\begin{aligned} TFR(t) \mu_p(t) &= \frac{e^{\delta t}}{1+\mu_c'} \int \exp\left(\frac{-\delta(X+\mu_c't)}{1+\mu_c'}\right) \frac{X+\mu_c't}{1+\mu_c'} X' m_c(0, X) dx \\ &= \frac{1}{(1+\mu_c')^2} \exp\left(\frac{\delta}{1+\mu_c'} t\right) \int X \exp\left(-\frac{\delta}{1+\mu_c'} X\right) m_c(0, X) dX + \frac{\mu_c'}{1+\mu_c'} t TFR(t). \end{aligned}$$

両辺を $TFR(t)$ で割って、(A-4)より、

$$\mu_p(t) = \frac{\int x \exp\left(-\frac{\delta}{1+\mu_c'} x\right) m_c(0, X) dx}{(1+\mu_c') \int \exp\left(-\frac{\delta}{1+\mu_c'} x\right) m_c(0, X) dx} + \frac{\mu_c'}{1+\mu_c'} t.$$

右辺第1項は t に依存せず、これが $\mu_p(0)$ である。

文献

別府志海 (2001) 「近年における出生率変動のタイミング効果」『人口学研究』28, pp. 17-24.

- Bongaarts, John and Griffith Feeney (1998) "On the quantum and tempo of fertility," *Population and Development Review* 24-2, pp. 271-291.
- Bongaarts, John and Griffith Feeney (2000) "On the quantum and tempo of fertility: Reply," *Population and Development Review* 26-3, pp. 560-564
- Foster, Andrew (1990) "Cohort analysis and demographic translation: A comparative study of recent trends in age specific fertility rates from Europe and North America," *Population Studies* 44, pp. 287-315.
- 福田亘孝 (1999) 「日本における第一子出生タイミングの決定因」『人口問題研究』55-1, pp. 1-20.
- 廣嶋清志 (2000) 「1970年代半ばからの合計出生率低下：コーホート出生率によるシミュレーション分析」『経済科学論集』26, pp. 1-39.
- 稲葉寿 (1986) 「期間合計特殊出生率とコーホート出生率の関係について」『人口問題研究』178, pp. 48-53.
- Kim, Young J. and Robert Schoen (1999) "Changes in timing and the measurement of fertility," Paper presented at special meeting in National Institute of Population and Social Security Research, October 20, 1999.
- Kim, Young J. and Robert Schoen (2000) "On the quantum and tempo of fertility: Limits to the Bongaarts-Feeney adjustment," *Population and Development Review* 26-3, pp. 554-559
- Keilman, Nico (1994) "Translation formulae for Non-repeatable events," *Population Studies* 48, pp. 341-357.
- Keilman, Nico (2001) "La translation démographique: des indicateurs de moment aux indicateurs de génération et réciproquement," in Caselli, Graziella, Jacques Vallin and Guillaume Wunsch (eds.), *Démographie: analyse et synthèse, I La dynamique des populations*, Paris, INED, pp. 359-378.
- Kohler, Hans-Peter, Francesco C. Billari and José Antonio Ortega (2001) "Towards a theory of lowest-low fertility," Max Planck Institute for Demographic Research, Working Paper WP 2001-032.
- Kohler, Hans-Peter and Dimiter Philipov (2000) "Variance effects in the Bongaarts-Feeney formula," *Demography* 38-1, pp. 1-16.
- 大谷憲司 (1993) 『現代日本出生力分析』関西大学出版部.
- Ryder, Norman B. (1964) "The process of demographic translation," *Demography* 1, pp. 74-82.
- Ryder, Norman B. (1980) "Components of temporal variations in American fertility," in R. E. Hiorns (ed.) *Demographic Patterns in Developed Societies*, London, Taylor&Francis, pp. 15-54
- van Imhoff, Evert (2001) "On the impossibility of inferring cohort fertility measures from period fertility measures," *Demographic Research* 5-2, pp. 24-64.
- van Imhoff, Evert and Nico Keilman (2000) "On the quantum and tempo of fertility: Comment," *Population and Development Review* 26-3, pp. 549-553

Basic Models of Demographic Translation

Toru SUZUKI

Demographic translation models, initiated by Ryder, give specific relationships between cohort and period fertility. This paper attempts to describe step-by-step evolution of basic models in demographic translation. Two types of models should be distinguished. Cohort models, as by Ryder (1964), specify the way of change in cohort fertility, and period fertility is seen to be dependent on cohort fertility. This determinant / dependent relation is reversed in period models, as by Bongaarts and Feeney (1998).

In terms of simplicity, three classes of models are distinguished. The first class allows change in tempo of fertility behavior but quantum is held constant. This class consists of two models. One is the horizontal linear shift model such as Bongaarts-Feeney model, and the other is the vertical linear shift model obtained by reducing Ryder's linear model. The second class allows quantum change but not tempo change. Again, a basic model in this class can be formalized by reducing Ryder's model. Although not in literature of demographic translation, this paper examines exponential quantum change as another basic model in this class. The third class allows both quantum and tempo changes. Ryder's linear model is one of the most basic models in this class. As another basic model, independent effect model, which combines the horizontal linear shift and exponential quantum change, is examined.

For all of these models, the cohort and period relationship in quantum, tempo and rate of change are clarified and translation formulae are compared. This paper also examines the performance of such indices as the tempo index and the average cohort fertility by Ryder and the adjusted TFR by Bongaarts-Feeney.

Working Paper Series(J)

*本シリーズは、研究成果に対して広く討議がなされることを目的として刊行するものです。

ご意見等をお寄せ下さいますよう、お願いいたします。

- 1 必要に応ずる分配原理
(後藤 玲子)
1997年7月
- 2 コーホート別の厚生年金負担・給付シミュレーション
(加藤 久和)
2000年10月
- 3 医療費の地域差による厚生損失の推計
(泉田 信行)
2000年10月
- 4 同居選択と妻の就業決定：どちらの親と同居するのか？
(大石亜希子・小塩隆士)
2001年6月
- 5 出生力のコーホート・モデルとピリオド・モデル
(鈴木 透)
2002年6月

