

内生的出生率と動学モデル

西村 和雄

I はじめに

出生率の急激な減少傾向が外国でも、深刻な問題として、受けとめられている。これを単なる、社会的な現象としてみなすなら、経済学の対象外の問題となる。しかし、個々の家計は、何人の子供をもつかを決定することができる。子供をもつことは、親の効用を生む一方で、コストがかかることでもある。環境と制度を与件とするなら、出生数の決定は、親の選択の問題、すなわち経済学の問題のひとつである。もちろん、社会的状況の変化は、出生数の決定に影響を与えるが、それも、比較静学（あるいは動学）をもって分析できる問題である。

出生率を、家計の選択問題の対象として分析したのは、ベッカー（1981）である。しかし、この分析は、静学モデルにとどまっていた。出生率の決定の動学モデルが、従来の経済成長モデルの一般化として、定式化されてきたのは、最近のことである。なかでもベッカーとバロー（1988）による定式化は、出生率を内生化した経済成長モデルとして、最も自然なものであろう。

II モデル

ベッカーとバローのモデルでは、親は、自身の消費 c_t から得られる効用 $u(c_t)$ と、子供の効用にウェイト $Q(n_t)$ をかけたものの和を、総効用 v_t とする。 n_t は子供の数である。子供1人の効用を V_{t+1} とすると、 $n_t V_{t+1}$ が子供達の効用の和

である。それにウェイト $\alpha(n_t)$ をかけて、親の効用の一部とする。

$$V^t = u(c_t) + \alpha(n_t)n_t V^{t+1} \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$t=0$ から始めて、(1)式を定式化し、 V^1, V^2 へと、次々に代入してゆくと、家計の効用関数、

$$V^0 = u(c_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{w=1}^t \alpha(n_w) n_w u(c_t) \quad (2)$$

が得られる。

一方、生産関数は、 $Y_t = F(K_t, L_t)$ で与えられる。 Y_t は生産量、 K_t は資本ストック量、 L_t は労働量である。生産関数の1次同次性を仮定して、各変数を L_t で割って、1人あたりの変数 y_t, k_t に変換し、生産関数を $y_t = f(k_t)$ と表す。個々の成人は賃金 w_t 、その親から受け継いだ資本 k_t 、資本からの利子 $r_t k_t$ を収入とする。一方、支出面は、消費 c_t 、子供の養育費 $n_t \beta$ 、そして子供達に残す遺産 $n_t k_{t+1}$ である。よって予算制約式は、

$$w_t + (1+r_t)k_t = c_t + n_t(\beta + k_t) \quad (3)$$

となる。生産面で、完全競争を仮定すると、利潤最大化条件から、

$$r_t = f'(k_t), \quad w_t = f(k_t) - n_t f'(k_t) \quad (4)$$

が成り立つ。(4)を(3)に代入して、

$$f(k_t) = c_t + n_t(\beta + k_{t+1}) \quad (5)$$

と簡単化できる。

初期値 k_0 と予算制約式(5)の下で、家計の効用(2)を最大化する問題は、最適性の原理を用いると、次のようにかきかえられる。

$$V(k_0) = \max_{c_0, n_0, k_1 \geq 0} [u(c_0) + \alpha(n_0)V(k_1)] \quad (6)$$

subject to

$$f(k_0) = c_0 + n_0(k_1 + \beta)$$

ここでは、 $a(n_0) = \alpha(n_0)n_0$ とおいてある。 $a(n)$ は増加関数かつ、狭義の凹関数である。以下では、問題が意味をもつために、 (k, n) は、

$$D = [0, \bar{k}] \times [0, \bar{n}]$$

に属し、 D の内部で、 $V(k)$ を含めたすべての関数が少なくとも2回連続微分可能であるとする。加えて、

$$a(0) = 0, \quad a(\bar{n}) < 1$$

を仮定する。そして、定常解 (k^*, n^*) が D の内部にあるとする。予算制約域を(6)の目的関数に代入して、

$$w(k_0, k_1, n) \equiv u(f(k_0) - n_0(k_1 + \beta)) + \alpha(n_0)V(k_1) \quad (7)$$

を定義する。問題(6)で、 n_0 の最適値は (k_0, k_1) に依存して決まる。よって(6)を、

$$V(x_0) = \max_{x_1} w(x_0, x_1, n(x_0, x_1)) \quad (8)$$

とかきかえることができる。

ここで、 $v(k_0, k_0) = w(k_0, k_0, n(k_0, k_0))$ と定義する。定常解 $k^* > 0$ は、

$$\begin{aligned} V(k^*) &= v(k^*, k^*) \\ &= \max_{k_1} v(k^*, k_1) \end{aligned}$$

をみたしている。 (k^*, n^*) は、

$$w_n = -(k + \beta)u'(c) + \alpha'(n)V(k) = 0 \quad (9)$$

$$w_{k_1} = -nu' + \alpha(n)V'(k) = 0 \quad (10)$$

の解である。また、(6)に包絡線定理を適用して、

$$V'(k) = u'(c)f'(k) \quad (11)$$

(10)と(11)から、

$$f'(k) = \frac{n}{\alpha(n)} \quad (12)$$

が定常解でみたされる。

III イースタリン仮説

リチャード・イースタリンは、一連の実証研究で、アメリカの出生率がこれまで40年周期で循環的に変動していることを発見した。イースタリンによると、アメリカの出生率は、2000年に向けて、再び上昇に転じることになる(表1を見よ)。これは、イースタリン仮説として広く知られている(1987)。バローとベッカーは、長期均衡とし

表1 イースタリンの仮説

	1920-40	1940-60	1960-80	1980-2000
人数の比 $\frac{15-19歳}{30-64歳}$		減少	上昇	減少
出生率	減少	上昇	減少	増加

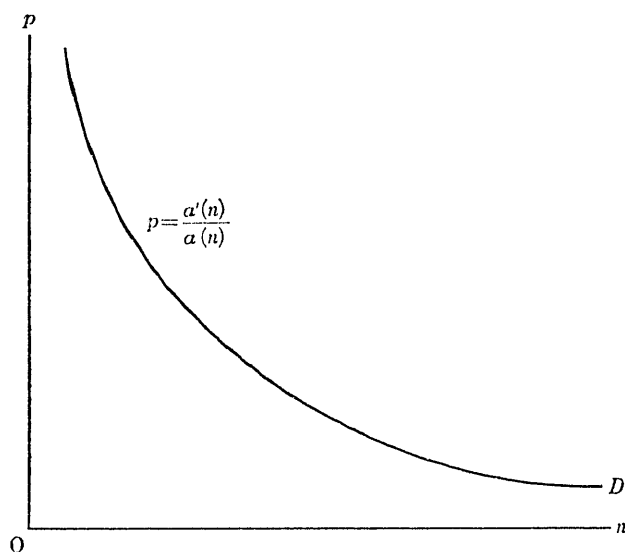


図1

ての定常解の分析に主に関心があった。動学経路の性質を明らかにすることによって、イースタリン仮説を論証したのは、ベンハビブと西村(1989)である。ベンハビブと西村は、子供に対する限界評価曲線、図1のDDの弾力性 e が、動学経路の性質を決定することを明らかにした。子供に対する限界評価は、 $p = \frac{\alpha'}{\alpha}$ で与えられる。その弾力性は、

$$e = -\frac{n}{p} \frac{dp}{dn} \quad (13)$$

である。 e は子供の数が1人増加するとき、その子供に対する限界評価が減少する度合いを表している。 $e > 1$ であれば、限界評価は急激に減少する。 $0 < e < 1$ であれば、それほど、減少しない。

最適解の性質を分析するには、ベンハビブと西村(1985)による、次の結果が用いられる。

補題 1 $k^* > 0$ を定常解, $k_0 > 0$ を非定常解とする。 k_0 から出発する(6)の内点解 $\{k_t\}$ について, 次の性質が成り立つ。

- (i) $v_{12} > 0$ ならば, k_t は単調な数列となる。
- (ii) $v_{12} = 0$ ならば, k_t は $t=1$ で定常解 k^* に到達する。
- (iii) $v_{12} < 0$ ならば, k_t は一期ごとに振動を繰り返す。

この結果を用いて, ベンハビブと西村 (1989) は, 次の定理を証明する¹⁾。

定理 1 非定常解 $k_0 > 0$ から出発する内点解 $\{k_t\}$ について,

- (i) $e > 1$ ならば, k_t は単調に変動する。
- (ii) $e = 1$ ならば, k_t および n_t は一期後に定常解 k^* と n^* に到達する。
- (iii) $e < 1$ ならば, k_t と n_t はそれぞれ一期ごとに, 振動を繰り返す。

定理 1 はイースタリン仮説が妥当する状況を明らかにしている。子供の数がすでに減少している先進国で, 家計が, 子供をもう 1 人もうけると仮定してみよう。子供が 1 人増加することによる限界評価は, それほど減少しないであろう。これは, 限界評価曲線の弾力性 e が, 1 よりも小さいこと

を意味する。すると, 子供の数は家計の所得により依存することになる。したがって, 出生率は, k_t と比例的に変動する。 k_0 から k_1 にかけて, 資本ストック量が増加したとすると, 一家計あたりの所得,

$$w_t + (1+r_t) = f(k_t)$$

も増加する。そして, 子供の数は, n_0 から n_1 に上昇する。ところが, この状況 ($e < 1$) の下では, 次の期の資本ストック量 k_2 は, k_1 よりも低下するのである。この背景には, n_1 が高かったことがもたらす, コーホート (同じ世代に属する人々) の増加がある。人数が増加したので, 1 人あたりの実質所得が低下したのである。そして, その世代の子供の数 n_1 は n_2 より少なくなる。イースタリンによると, コーホートのサイズが大きければ, 兄弟・姉妹, 初等教育, 進学, 就職, 昇進のすべての側面で, より激しい競争にさらされ, しかも, 個々の人間に与えられる機会は少なくなる。結果として, より, 相対的な実質所得は, 低くなる。相対的な実質所得とは世代のもつ満足度を指標としたものである。

先進国の 1 人あたり実質所得は, 毎年増加し続けている。この事実をモデルに反映させるためには, 生産関数に技術進歩を導入すればよい²⁾。そのとき, 上の定常解 k^* は資本・労働比が技術進歩率を等しい値で成長してゆく経路におきかえられる。それを成長経路のトレンドとすると, テレンドから, 上下に乖離することが (図 3), k_t の振動と対応する。イースタリンにより相対的な実質所得をそのまま理論的に定義することは難しい。しかし, テレンドと比較することによって, 実質所得を相対化することは, イースタリンの意味することから, それほど遠くないと思う。

上の問題で, 子供の効用にかかるウェイトを一定とする ($a(n)=a$) と, 親は, 子供 1 人あたりの効用の値 $V(k_1)$ を考慮することになる。そして, 子供をもつこと自体が親に喜びを与えると仮定して, 問題(6)を変えた,

$$\begin{aligned} V(k_0) = \text{Max} [u(c_0, n_0) + aV(k_1)] \\ \text{s. t. } f(k_0) = c_0 + n_0(k_1 + \beta) \end{aligned} \quad (14)$$

を問題とすることができる。この場合の解の性質

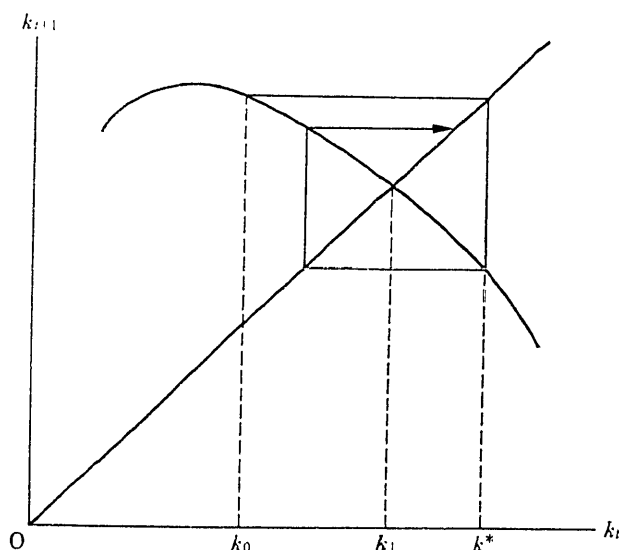


図 2

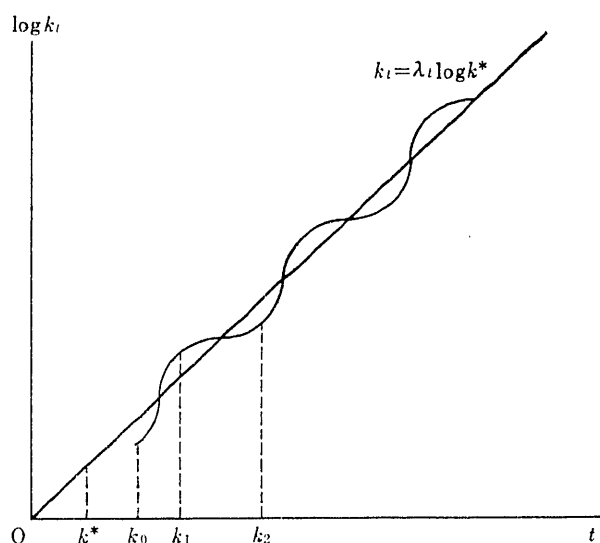


図 3

は、ケンプと近藤 (1986), ラパンとエンダース (1990) によって分析された。Ⅲ節の補題 1 を用いた方法は、この問題にも適用することができる。その証明は、西村とクナボンクル (1991) で与えられ、以下の定理 2 にまとめられる。まず、 e_n を所得の限界効用の所得弾力性の絶対値とする³⁾。すると、次の結果が成り立つ。

定理 2 $k_0 > 0$ を非定常解、 $\{k_t\}$ を k_0 からの最適な内点解、 $\{n_t\}$ を $\{k_t\}$ に対応する解とする。

- (i) $e_n > e_\lambda$ ならば、 $\{k_t\}$ は単調に変動する。
- (ii) $e_n = e_\lambda$ ならば、 k_t と n_t は次期に定常解に達する。
- (iii) $e_n < e_\lambda$ ならば、 $\{k_t\}$ と $\{n_t\}$ は一期ごとに、振動を繰り返す。

この結果では、条件は所得弾力性の差で表現されている。子供への需要の所得弾力性が、(所得の限界効用の弾力性よりも)、高ければ、資本ストックは振動することになる。そして、出生率も同じように振動する。この背後には、やはり資本ストックが上昇すれば、実質所得が高くなり、出生率が上昇する。出生率の上昇の効果がその次の期の 1 人あたりの資本ストックを低下させ、その結果、出生率が低下するという関係がある。

IV 社会保障と出生率

社会保障の効果を分析するためには、世代重複型モデルを用いるほうが適当であろう。しかも、老人に対する社会保障が正当化されるためには、勤労世代が、老人の生活水準について、関心をもっている必要がある。この点を明示的に定式化したのは、ヴィール (1986) であった。ヴィールのモデルでは、出生率は外生的であった。それを内生化したのは、西村とザン (1992) である。いま簡単化のために、生産を捨象して、若い各世代は、1 人あたり、所得 M を受けるとしよう。現時点で、若い世代の消費を c_t^i 、彼らの老後の消費を c_{t+1}^i で表す。若い世代の効用は $u(c_t^i, c_{t+1}^i, c_t^{i-1})$ で表される。変数はすべて 1 人あたりの値である。親の消費水準 c_t^{i-1} が子供の効用に影響しているのが特徴である。利子率 r を一定、子供の数の代わりに出生率を n_t 、貯蓄を s_t 、 $\beta(1+n_t)$ を子供を養育するコストとすると、この世代の消費は、

$$M = c_t^i + s_t + g_t + \beta(1+n_t) \quad (15)$$

によって、決定される。ここで g_t は、現世代が親に与える援助である。親は、子供 1 人からの援助を受け、自らの貯蓄からの収入を加えて、消費を行う。

$$c_t^{i-1} = (1+r)s_{t-1} + (1+n_{t-1})g_t \quad (16)$$

現在の世代の老後の消費量は、貯蓄からの収入、自分の子供からの援助 $(1+n_t)g_{t+1}$ によってまかなわれる。

$$c_{t+1}^i = (1+r)s_t + (1+n_t)g_{t+1} \quad (17)$$

以上のモデルで、各世代の代表的個人は、次の問題の解として、消費量 c_{t+1}^i 、 c_t^{i-1} 、貯蓄額 s_t 、出生率 n_t 、親へ与える援助額 g_t を決める。同世代の人数 $1+n_{t-1}$ 、親の貯蓄額 s_{t-1} は所与である。将来、自分の子供、それぞれが自分の退職後に提供してくれるであろう援助額 g_t も所与としておく。

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{c_t^i, s_t, g_t, n_t} u(c_t^i, c_{t+1}^i, c_t^{i-1}) \quad (18) \\ & \text{s. t. } c_{t+1}^i = (1+r)s_t + (1+n_t)g_{t+1} \\ & c_t^{i-1} = (1+r)s_{t-1} + (1+n_{t-1})g_t \\ & M = c_t^i + s_t + g_t + \beta(1+n_t) \end{aligned}$$

この問題の解として決まる貯蓄の援助出生率を、与件の関数として、

$$\begin{aligned} s_t &= s(s_{t-1}, n_{t-1}, g_{t+1}) \\ n_t &= n(s_{t-1}, n_{t-1}, g_{t+1}) \\ g_t &= g(s_{t-1}, n_{t-1}, g_{t+1}) \end{aligned} \quad (19)$$

と表すことができる。いま、長期均衡として、定常解 $(\bar{s}, \bar{g}, \bar{n})$ を考えると、それは、

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s(\bar{s}, \bar{n}, \bar{g}) \\ \bar{n} &= n(\bar{s}, \bar{n}, \bar{g}) \\ \bar{g} &= g(\bar{s}, \bar{n}, \bar{g}) \end{aligned} \quad (20)$$

をみたすはずである。これは一種のナッシュ均衡と考えられる。

以上は、子供が与えてくれる援助への予想が正しければ、実現される解である。もし、子供が親と同じ効用関数をもっているなら、親の貯蓄 $\bar{s}$ 、出生率 $\bar{n}$ 、援助額 $\bar{g}$ の下で、子供も、親の老後の消費を維持するべく、子供1人あたり、同じ額 $\bar{g}$ の援助をしてくれるであろう。

このような自発的な解の問題点は貯蓄 $\bar{s}$ が正であるときに起こる。子供が自分の老後の消費量に関心をもって、援助をしてくれることを、親が知っているなら、貯蓄を0として、現在の消費 c_t^2 を増加させる。貯蓄の減少分は子供の援助で補うことが可能になる。このような、世代間の戦略的な行動のもとら結果は、それなりに興味があることであるが、ここでは、議論を避ける。むしろ、社会保障の厚生的意味を重要とする。子供の世代から、親の世代への自発的な援助が、上記の戦略的な行動の下では、解として維持できない可能性がある。一方、政府が、賦課方式によって、若年層からとりたてた税金を、老世代に年金として補助するなら、老後の収入に対する不安は減少する。

定常解で最も高い効用を与える資源配分は、次の問題を解いて得られる。

$$\begin{aligned} \text{Max}_{c_1, c_2, s, n, g} \quad & u(c_1, c_2, c_2) \\ \text{s. t.} \quad & c_2 = (1+r)s + (1+n)g \\ & M = c_1 + s + g + \beta(1+n) \end{aligned} \quad (21)$$

この問題の解 $(c_1^*, c_2^*, s^*, n^*, g^*)$ を、最適解と呼ぶ。最適解における効用はもちろん、自発的な解における効用よりも高くなっている。政府が、この解 g^* を若年層から税金として徴収し、老年層

に年金として $(1+n)g^*$ を与えるとどうなるであろうか。各世代が、問題(18)の与件を、

$$s_{t-1} = s^*, \quad n_{t-1} = n^*, \quad g_{t+1} = g^* \quad (22)$$

と、最適解と等しく想定して、自己の貯蓄、出生率、親への援助を決めたとする。その解、

$$\begin{aligned} s_t &= s(s^*, n^*, g^*) \\ n_t &= n(s^*, n^*, g^*) \\ g_t &= g(s^*, n^*, g^*) \end{aligned} \quad (23)$$

は、一般的には (s^*, n^*, g^*) と異なる値をとる。解(23)は、自分の老年期には、年金 g^* を受け取ると仮定して、効用を最大化するものである。しかもその親の世代の貯蓄と出生率は、 s^* と n^* に等しくおいている。一般に、解(23)は、最適解と異なりはするが、 $g_t \leq g^*$ であれば、自発的な援助額が、年金を下回っているので、 g_t ではなく、 g^* が徴収される。

以上の考察から、一般に、税金の額が $\hat{g}$ と定められたときの、最大化問題、

$$\begin{aligned} \text{Max}_{c_t^1, s_t, g_t, n_t} \quad & u(c_t^1, c_{t+1}^1, c_{t+1}^{1-1}) \\ \text{s. t.} \quad & c_{t+1}^1 = (1+r)s_t + (1+n_t)\hat{g} \\ & c_{t+1}^{1-1} = (1+r)\hat{s} + (1+\hat{n})g_t \\ & M = c_t^1 + s_t + g_t + \beta(1+n_t) \end{aligned} \quad (24)$$

を考える。この問題の定常解で $g_t = \hat{g}$ がみたまされるものを、西村とザン(1992)は、サスティナブルな解と呼んだ。 $\hat{s} = 0$ でかつ、 n が外生的なケースについては、サスティナブルな解になることが、西村とザンの Proposition 2 で証明されている。さて、出生率が内生的な一般のケースについては、最適解は、必ずしもサスティナブルではない。そこで、 $\bar{g} < \hat{g} \leq g^*$ の範囲で税金の額 $\hat{g}$ を定めて、サスティナブルな解を求める。サスティナブルな解が、自発的な解(20)よりも高い効用を与えるなら、社会保障制度を導入することが望ましいことになる。西村とザン(1991)は年金制度の下でのサスティナブルな解が、自発的な解に比べて、社会的に望ましいことを証明している。そして、年金制度の下での出生率は、自発的な解に比べて低い水準となる。一方、貯蓄および若年期における消費の水準は、自発的な解と比べると高くなるのである。

注

- 1) バローとベッカーが分析したのは、定理1の(ii)のケースである。したがって、定常解の分析が中心となる。
- 2) 技術進歩を考慮した一般化については、ベンハビブと西村(1992)を参照。
- 3) ここで、 $e_n = \left(\frac{I}{n}\right)\left(\frac{dn}{dI}\right)$, $\lambda = u_c(c, n)$, $e_\lambda = -\left(\frac{I}{\lambda}\right)\left(\frac{d\lambda}{dI}\right)$ と定義されている。

参考文献

- [1] R. Barro and G. Becker, "Fertility Choice in a Model of Economic Growth," *Econometrica*, 57, 481-501 (1989).
- [2] G. Becker, *Treatise on the Family*, Harvard University Press (1981).
- [3] G. Becker and R. Barro, "A Reformulation of the Economic of Fertility," *Quarterly Journal of Economics*, 103, 1-26 (1988).
- [4] J. Benhabib and K. Nishimura, "Competitive Equilibrium Cycle," *Journal of Economic Theory*, 35, 284-307 (1985).
- [5] J. Benhabib and K. Nishimura, "Endogenous Fluctuations in the Barro-Becker Theory of Fertility," in A. Wenig and Zimmermann, ed., *Demographic Change and Economic Development*, 29-41 Springer-Berlag (1989).
- [6] J. Benhabib and K. Nishimura, "Endogenous Fertility and Growth," *General Equilibrium, Growth and Trade II*, ed. by M. Boldrin, R. Becker, R. Jones and W. Thomson, Forthcoming, Academic Press (1992).
- [7] W. Dechert and K. Nishimura, "A Complete Characterization of Optimal Growth Paths in an Aggregated Model with a Non-concave Production function," *Journal of Economic Theory*, 31, 332-354 (1983).
- [8] R. Easterlin, "Relative Economic Status and the America Fertility Swing," in E. B. Sheldon, ed., *Family Economic Behavior: Problems and Prospects*, Lippincott, Philadelphia (1983).
- [9] R. Easterlin, *Birth and Fortune*, The second edition, The University of Chicago Press (1987).
- [10] M. C. Kemp and H. Kondo, "Overlapping Generations, Competitive Efficiency and Optimal Population," *Journal of Public Economics*, 30, 237-247 (1986).
- [11] H. E. Lapan and W. Enders, "Endogenous Fertility, Ricardian Equivalence, and Debt Management Policy," *Journal of Public Economics*, 41, 227-248 (1990).
- [12] K. Nishimura and V. Kunapongkul, "Economic Growth and Fertility Rate Cycles," *Chaos, Solitons and Fractals*, 1, 475-484 (1991).
- [13] K. Nishimura and J. Zhang, "Pay-as-you-go Public Pensions with Endogenous Fertility," *Journal of Public Economics* (1992), Forthcoming.
- [14] K. Nishimura and J. Zhang, "Sustainable Plans of Social Security," KIER Discussion Paper (1991).
- [15] Veall, M. r., "Public Pensions as Optimal Social Contracts," *Journal of Public Economics*, 31, 237-251 (1986).

(にしむら・かずお 京都大学教授)