

## 死亡率の年齢パターンに関する リレーショナル・モデルの開発

金 子 隆 一

### I はじめに

年齢別死亡率などに見られる死亡の年齢パターンの規則性は、生物統計学者だけでなく、長年にわたって多くの人口学者の注意をも引いてきた。それと言うのも、人口学者は世界の大半を占める統計システムの完備しない地域において、死亡のみならず一般の人口情報を得るために人口学的間接推計法を用いなければならないが、その技法の重要な基礎として、死亡の年齢パターンを少数のパラメータによって記述することが要求されるからである<sup>1)</sup>。一般の人口に見られる死亡の年齢パターンの規則性を利用すれば、ある程度それが可能である。そのため人口学の実用的分野においては、死亡の年齢パターンの規則的な部分を標準化し、またそれからの変異をも表現し得るモデルを開発するために多くの努力が払われてきた<sup>2)</sup>。

死亡の年齢パターンをモデルによって記述するには、大きく分けて三つのタイプの方法が存在する。すなわち、(1)数学モデルによる方法、(2)経験的モデルによる方法、そして、(3)リレーショナルモデルによる方法である<sup>3)</sup>。先に述べた人口学における従来からのモデル開発は、経験的モデル生命表によって代表されるように、主として(2)の方法に沿って行われてきた。それと言うのも、数学モデルは一般に記述が簡潔であり、理論的発展性にも富むが、反面年齢全般にわたって実用的適用が可能なモデルを作成しようとする、そこに用いられるパラメータの数は経験的に必要とされる数を大幅に上回ってしまうのが普通だからである<sup>4)</sup>。もともと経験的最小限のパラメータしか持たない数学的関数によっ

- 1) 人口学的間接推計法およびそこにおける死亡の標準年齢パターンの役割については、United Nations, *Manual X: Indirect Techniques for Demographic Estimation*, New York, United Nations, 1983 など参照。
- 2) たとえば、United Nations, *Age and Sex Patterns of Mortality* (Population Studies No 22), New York, United Nations, 1955, S. Ledermann, *Nouvelles Tables - Types de mortalité* (Travaux et Documents, Book No 53), Paris, Institut National d'Etudes Démographiques, 1969, United Nations, *Model Life Tables for Developing Countries* (Populations Studies, No 33), New York, United Nations, 1982, A. J. Coale and P. Demeny, *Regional Model Life Tables and Stable Populations* 2nd ed., New York, Academic Press, 1983.
- 3) D. C. Ewbank, J. C. Gomez de Leon and M. A. Stoto, "A reducible four-parameter system of model life tables", *Population Studies*, vol. 37, No 3, 1983, pp. 105.
- 4) たとえば、Heligman と Pollard による年齢別死亡確率への関数モデルの当てはめの試みにおいて、実用的適合度を得るためには8個のパラメータを必要としている。L. Heligman and J. H. Pollard, "The age pattern of mortality", *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 107, part 1, 1980, pp. 49-80. これに対し、経験的に必要とされるパラメータの数は、たとえば Ledermann と Breas によれば主要なものは性別を含めて3個である。S. Ledermann and J. Breas, "Les dimensions de la mortalité", *Population*, vol. 14, No 4, 1959, pp. 637-682.

て全年齢にわたる死亡の傾向を記述することは、加齢および死亡の生物学的過程の複雑さから見て困難と言わざるを得ない。これに対し経験的モデル生命表は、最小限のパラメータによって実用的適合度を実現し得る。しかしながら別の側面において、この経験的モデル生命表は数値表による提示をその記述形態としているため、冗長である上に実用に際しても煩雑な補間法等に頼ってその間隙を埋めなければならない。さらに、新たにモデル生命表を作成するためには、相当量の信頼し得る年齢別の死亡データと、一連のこみ入った手続きを必要とする。

第三のタイプ、すなわち Brass のロジットモデル<sup>5)</sup> に代表される死亡の年齢パターンに関するリレーショナルモデルは、標準となるパターンを与え、これに対して少数のパラメータによって制御される数学的変換を施すことによって、任意の人口の年齢パターンを得ようとするものである。従ってそれは数学モデルにおける記述の簡潔さと経験的モデルの実際的適合性を同時に備えるものであり、実用的あるいは分析的応用双方に対して、その有効性が期待される場所である。しかしながら、従来のロジットモデルは、その精度が経験的モデル生命表には及ばず、実用的利用範囲は比較的限られたものであった。また数理モデルと比較すると、その理論的背景の曖昧さは、分析的応用への大きな制約であった。後者はまた自身の発展に対しても制約になってきたものと思われる。

本稿では、以上に述べた点で有利と考えられるまったく新しいリレーショナルモデルを提案し、その有効性を検討することを目的とする。そこでは人口学的応用に志向して複数のリレーショナルモデルが提案されるが、それらは導出にあたって共通の理論的枠組みを持ち、人口における死亡レベル変化に伴う年齢パターンの変化のいくつかのタイプを定式化することに基づいて体系的に展開されたものである。またそれと並行して、やはり共通の数学的枠組みから従来のロジットモデルの拡張も試みられた。それらの理論的展開は II 章に述べられる。また、これらのモデルは III 章において、その直接の人口学的応用例として、既存の経験的モデル生命表の記述ならびに死亡の年齢パターンの過去、将来への投影 (projection) に適用され、その有効性のテストからは満足すべき結果が得られた。

## II 理論的展開

### 1. リレーショナルモデルの一般的枠組み

Brass が人口学に、ロジット変換を用いた死亡の年齢パターンに関するリレーショナルモデルを導入して以来<sup>6)</sup>、このモデルは人口学的間接推計法に役立っただけでなく、さまざまな死亡の分析に適用されてきた。このモデルは、以下のように定式化される。すなわち、 $p_i(x)$ 、 $p_j(x)$  をそれぞれ人口  $i$ 、 $j$  の生命表における年齢 0 歳から  $x$  歳までの生存確率または生存関数とすると、これらの関係は、

$$\frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1-p_j(x)}{p_j(x)} \right\} = \alpha + \beta \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1-p_i(x)}{p_i(x)} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

によって表される。ここに、 $\alpha$ 、 $\beta$  は両者の関係を記述するパラメータである。したがって、 $p_i(x)$  として特定のものを定めれば、任意の人口における生存関数  $p(x)$  が  $\alpha$  および  $\beta$  の二つのパラメータによ

5) W. Brass, "On the scale of mortality", W. Brass ed., *Biological Aspects of Demography* (Symposia of the Society for the Study of Human Biology, vol. X), London, Taylor and Francis Ltd., 1971, pp. 69-110.  
6) W. Brass, et al., *The Demography of Tropical Africa*, Princeton, Princeton University Press, 1968.

って記述される。ここに現れる線形関係の基礎となる数学的枠組みは、以下の通りである。

$c(x)$ ,  $h_i(x)$  ( $i = 1, 2 \dots$ ) をそれぞれ変数  $x$  の関数とし、両者の間に次式を満足するような変換  $f$  が存在するとする。

$$h_i(x) = f\left(\frac{c(x) - \xi_i}{\theta_i}\right) \dots\dots\dots (2.2)$$

ただし、 $\xi_i$  と  $\theta_i$  は、それぞれ  $h_i(x)$  の位置および尺度を調整するパラメータである。言い換えれば、 $h_i(x)$  は  $t = \{c(x) - \xi_i\} / \theta_i$  によって  $f(t)$  に軸変換を施した一群の関数を表す。

さて、ここで関数  $f$  の逆変換 ( $f^{-1}$ ) が存在すれば、関数  $h$  の任意の二つのメンバー ( $h_i(x)$ ,  $h_j(x)$  とする) に対して成立する上式 (2.2) から共通の  $c(x)$  を消去することによって次式を得る。

$$f^{-1}\{h_j(x)\} = \alpha + \beta f^{-1}\{h_i(x)\} \dots\dots\dots (2.3)$$

ここに、 $\alpha = (\xi_i - \xi_j) / \theta_j$ ,  $\beta = \theta_i / \theta_j$  (共に定数)。

すなわち、式 (2.2) に表されるような共通の構造を持つ関数  $h$  の任意のメンバー同志は、式 (2.3) に示されるように、特定の変換 ( $f^{-1}$ ) の線形関係で結ばれる。

ここで、 $h(x)$  を一般の人口における死亡年齢の確率分布関数 ( $1 - p(x)$ ) と見なし、 $f(t)$  を標準ロジスティックカーブ、すなわち、

$$f(t) = \frac{1}{1 + \exp(-2t)} \dots\dots\dots (2.4)$$

とすれば、(2.3) の関係は式 (2.1) に示した Brass のロジット変換モデルとなる。

すなわち、このことは一般の人口において死亡年齢の確率分布関数は、ロジスティックカーブをどの人口にも共通な関数によって軸変換したものと近似されることを示している。

## 2. 基本モデルの導出

本節において我々は、加齢に伴う死亡の生起過程の一般的モデルを提案する。その目的は、引き続き節において展開されるリレーショナルモデルの理論的基礎を与えることにある。

我々のモデルにおいて生命の維持とは、生物がその生育する環境において常時発生する攪乱作用に抗して、その生体の恒常性を保って行く現象として定式化される。環境の攪乱作用の強度は、基本的にその環境の状態によって決まる。すなわち、状態の悪い環境下ではレベルの高い攪乱がより頻繁に生じる。一方、生物はその生存に直接関与する最も基本的な機能に対しては、複数の部位によって並列的にその機能が果されているので、その一部の破綻は直ちに死亡を意味しない。ただ回復に要する一定の時間内において、環境攪乱が全ての部位でその機能を破綻せしめた場合にのみ、その個体は死に至る。また、個々の部位は攪乱のレベルに関して許容レベルと言うべきものを持ち、このレベルを超えた攪乱に対しては回復が不可能であるとする。ここで、環境攪乱をちょうど信頼性理論における建造物への衝撃のように、生体に対する衝撃と見なし、その個々のレベルが環境に特有の確率分布にしたがう確率変数であるとする、この生存に関するモデルは死亡確率を媒体として次のように定式化される。

$Pr \{ \text{生体がある短い期間に死亡する} \}$

$= Pr \{ \text{その期間中に生体の生存にとって最も重要な機能を並列的に果たす  
複数の部位で生じた環境攪乱のレベルの最小値が許容範囲を超える} \}$

ここで、攪乱のレベルは互いに独立に同じ分布にしたがっていると、各部位の許容範囲は同じとする。これを、記号を使って言い換えれば、

$$\mu(x)dx = \left[ 1 - F \{ V(x) \} \right]^n dx \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに、 $\mu(x)$ は $x$ 歳での瞬間の死亡率 (the instantaneous death rate)、または死力 (the force of mortality) であり、 $F$ は環境攪乱のレベルの確率分布関数 (C. D. F.),  $V(x)$ は生体の重要部位の環境攪乱レベルに対する許容範囲 (以後「生命力」と呼ぶ)、また $n$ は部位の数を表す。

この際、極値分布の漸近理論に従えば、 $n$ を充分大きくしたとき式(2.5)の右辺が極限分布を持つなら、その関数型は二重指数分布型、あるいはワイブル分布型に限定される<sup>7)</sup>。実際、後に示すように、その中でゴンパーツ分布は経験的なデータによく適合する。この場合、式(2.5)のより具体的な形は、

$$\mu(x)dx = \exp \left[ 1 - \exp \left\{ (V(x) - \xi) / \theta \right\} \right] dx \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

となる<sup>8)</sup>。ただし、 $\xi$ ,  $\theta$  はそれぞれ位置、尺度を調整するパラメータである。

ゴンパーツ分布は一般に寿命分布 (死亡年齢の分布) の近似としてよく用いられるが、ここでの使い方はまったく異なるので注意を要する。すなわち、ここでゴンパーツ分布は環境攪乱のレベルの極値分布の近似として用いられるのであって、寿命分布そのものを近似するのではない。実際、一般の場合には死力はそのハザード関数で与えられるが、本モデルにおいては死力は式(2.6)に示される通り、その生存関数を修飾することによって与えられる。

生命力関数 $V(x)$ は、同一生物種に属する集団間では共通であることが期待できるから、その中の任意の二つの集団 $i, j$ に対して成り立つ式(2.6)から $V(x)$ を消去することができて、

$$\ln \{ 1 - \ln \mu_j(x) \} = \frac{\xi_i - \xi_j}{\theta_j} + \frac{\theta_i}{\theta_j} \ln \{ 1 - \ln \mu_i(x) \} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

が成り立つ。

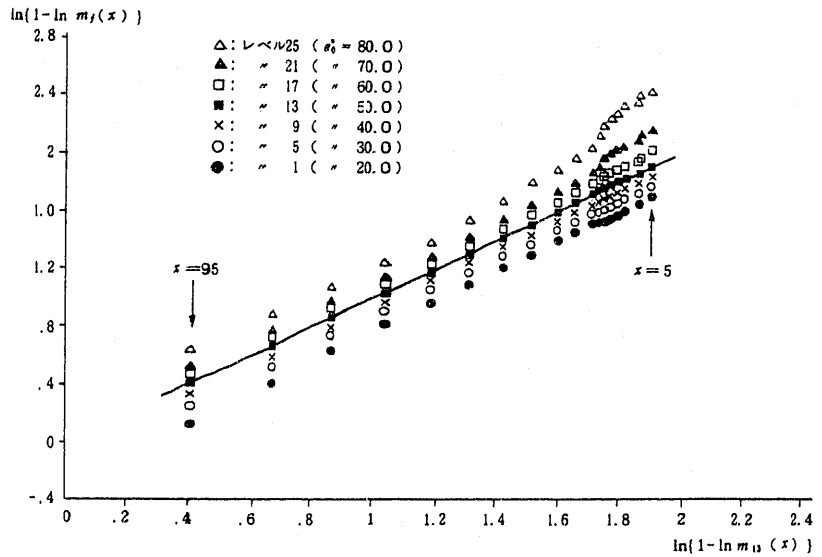
式(2.7)は、同一種の任意の二つの集団あるいは人口において死力の間には二重対数を介した線形関係が存在することを示している。図1は、Coale と Demeny のモデル生命表から、West モデル平均寿命20歳から80歳にわたって10歳ごとに選んだ生命表を $j$ とし、平均寿命50歳の生命表を $i$  (= 13) とした場合の両者の死力 (年齢5歳以上) の二重対数をプロットしたものであるが、各グラフは良好な直線性を示し、式(2.7)のこの含意が経験的事実によく適合していることを示している。

7) R. A. Fisher and L. H. C. Tippett, "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. V, No XXIV, Part II, 1928, pp. 180-190.

8) ここで用いたゴンパーツ分布は位置、尺度パラメータを含むが一般型ではなく、標準型を $\xi, \theta$ によって位置、尺度の変換を行ったものである。

さらに、この図からは各レベルの点を結んだ線が概ね平行であり、またその傾きは1に近いことが観察されるであろう。このことは環境攪乱のレベルの確率分布における尺度パラメータ  $\theta$  がどの人口においてもほぼ同一であることを意味する。この観察に基づき式(2.7)をより簡略な形に書き直すことが可能である。すなわち、

図1 Coale と Demeny による“West”ファミリー女子における  $\ln\{1-\ln m_j(x)\}$  の  $\ln\{1-\ln m_{13}(x)\}$  に対するプロット



$$1 - \ln \mu_j(x) = \beta \{ 1 - \ln \mu_i(x) \} \dots\dots\dots (2.8)$$

ただし、 $\beta = \exp \{ (\xi_i - \xi_j) / \theta \}$ 、また  $\theta$  は一般の人口に共通の尺度パラメータである。

すなわち、二つの集団における(死力を用いて表された)死亡の年齢パターン(5歳以上)は、一つのパラメータ  $\beta$  によって、式(2.8)に示される簡単な形に関係づけることができる。

ここに導入したモデルを前節において記述したリレーショナルモデルの一般的枠組みに従って見直すと、死力  $\mu(x)$  は  $h(x)$  に、生命力関数  $V(x)$  は  $c(x)$  に、そして環境攪乱のレベルの確率分布として導入したゴンパーツ分布の生存関数は  $f(x)$  にそれぞれ対応する。

次節において、本モデルのリレーショナルモデルとしての展開について述べる。

### 3. リレーショナルモデルの展開

ここではさまざまな死亡レベルにある人口同志を関係づけるため、以下に五つの死亡状況の変化のモードを導入する。

- (1) 環境攪乱レベルまたは生命力が現レベルに対して中立的に変化する場合
- (2) 環境攪乱レベル、生命力いずれかが現レベルに対して比例して変化する場合
- (3) 環境攪乱レベル、生命力いずれかが現レベルに対して線形に変化する場合
- (4) 環境攪乱レベルおよび生命力が現レベルに対して比例して変化する場合
- (5) 環境攪乱レベルおよび生命力が現レベルに対して線形に変化する場合

以下に、これらの各々に対応するリレーショナルモデルの展開を行う。注意すべき点は、前節の基本モデルの導出の際には環境攪乱のレベルに対応するパラメータ(確率分布の位置パラメータ)  $\xi$  は、簡単のために定数として扱われたが、本節ではそれは生命力と同様に年齢の関数と考えることである。

- (1) 環境攪乱レベルまたは生命力が現レベルに対して中立的に変化する場合

$\xi_1(x)$ 、 $\xi_2(x)$  をある人口の二つの時点における環境攪乱のレベルの確率分布における位置のパラメータ(以後、環境攪乱のレベルと呼ぶ)、または単に二つの異なる人口の環境攪乱のレベルとする。 $\xi_1(x)$  から  $\xi_2(x)$  へ環境攪乱が中立的変化をするとは、次のことである。

$$\xi_2(x) = \xi_1(x) + a \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ここに、 $a$  は年齢に対する定数である。

式 (2.6) より、人口 1 に対して、

$$\mu_1(x) = \exp \left[ 1 - \exp \{ M_1(x) \} \right] \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

が成り立つ。ただし、 $M_1(x) = \{ V(x) - \xi_1(x) \} / \theta$ 。

ここでは、 $\theta$  は前節での観察に従って、すべての人口に共通の値を持つとした。

人口 2 に関しても、 $\mu_2(x)$  および  $M_2(x)$  は同様に表せる。すると、

$$M_2(x) = M_1(x) - a / \theta$$

$$\therefore \mu_2(x) = \exp \left[ 1 - \exp \{ M_1(x) - a / \theta \} \right]$$

または、

$$1 - \ln \mu_2(x) = \beta \{ 1 - \ln \mu_1(x) \} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

ここに、 $\beta = \exp(-a / \theta)$  である。

これは前節における結果、すなわち式 (2.8) と同じである。

生命力が単独で中立的な変化をする場合、あるいは環境攪乱のレベルと生命力がともに中立的な変化をする場合にも同様の結果を得る。生命力の変化は生体にとって致命的な疾病、外傷に対して効果的な治療が行われる場合などに考慮しなくてはならないであろう。

(2) 環境攪乱レベル、生命力いずれかが現レベルに対して比例して変化する場合

このタイプの変化は、たとえば環境攪乱レベルの場合は、

$$\xi_2(x) = b_2 \xi_1(x) \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

と表せる。ここで、 $b_2$  は定数である。すると、

$$M_2(x) = M_1(x) + (1 - b_2) \xi_1(x) / \theta,$$

$$1 - \ln \mu_2(x) = \{ 1 - \ln \mu_1(x) \} \exp \{ (1 - b_2) \xi_1(x) / \theta \}$$

第三の人口にもまったく同様に、

$$1 - \ln \mu_3(x) = \{ 1 - \ln \mu_1(x) \} \exp \{ (1 - b_3) \xi_1(x) / \theta \}$$

が成り立つ。これら二式から  $\xi_1(x) / \theta$  を消去して、

$$\ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_3(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} = \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_2(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

を得る。ただし、 $\beta = (1 - b_3) / (1 - b_2)$  (定数) である。

式 (2.13) は、環境攪乱レベルが比例的に変化する状況下における三つの人口の死力の間関係を表している。生命力が比例的に変化する場合もまったく同じ結果になることが示せる。

環境攪乱レベル、または生命力の現レベルに対する比例変化は、レベルがその限界に近づいたときの天井効果などの際の変化の近似として期待できる。

なお、前節および前段(1)ではモデルは常に年齢5歳以上に対して考察されて来たが、後に示すように、(2)以降のモデルではその精度の点で5歳未満を含めても実用上問題無い。

(3) 環境攪乱レベル、生命力いずれかが現レベルに対して線形に変化する場合  
本モードは、環境攪乱レベルに対しては、

$$\xi_2(x) = b_2 \xi_1(x) + a_2 \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

によって表される。(2)と同様に、

$$M_2(x) = M_1(x) + \{ (1 - b_2) \xi_1(x) - a_2 \} / \theta,$$

$$\therefore \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_2(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} = \{ (1 - b_2) \xi_1(x) - a_2 \} / \theta.$$

これを第三の人口にも適用して  $\xi_1(x)$ ,  $\theta$  を消去すると、

$$\ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_3(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} = \alpha + \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_2(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\}, \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

ここに、 $\alpha = (a_2 / \theta) (1 - b_3) / (1 - b_2) - a_3 / \theta$ ,  $\beta = (1 - b_3) / (1 - b_2)$  (共に定数) である。

(4) 環境攪乱レベルおよび生命力が現レベルに対して比例して変化する場合  
この場合には、前提は各人口に対する次の連立方程式によって表される。

$$\begin{cases} \xi_2(x) = b_2 \xi_1(x) \\ V_2(x) = d_2 V_1(x) \end{cases}, \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

ただし、 $b_2$ ,  $d_2$  は定数である。

これまでと同様の手続きにより、四つの人口の死力に対して、

$$\ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_4(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} = \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_2(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} + \gamma \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_3(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} \dots\dots\dots (2.17)$$

が成り立つ。

(5) 環境攪乱レベルおよび生命力が現レベルに対して線形に変化する場合  
 ここでの前提は、人口2に対する  $a_2, b_2, c_2$  および  $d_2$  を定数として、

$$\begin{cases} \xi_2(x) = b_2 \xi_1(x) + a_2 \\ V_2(x) = d_2 V_1(x) + c_2 \end{cases}, \dots\dots\dots (2.18)$$

と表せる。これより同様の手続きによって、

$$\ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_4(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} = \alpha + \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_2(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} + \gamma \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_3(x)}{1 - \ln \mu_1(x)} \right\} \dots\dots (2.19)$$

を得る。

(1)から(5)のそれぞれの死亡状況の変化のモードに対応する五つのリレーショナルモデルは、以下の  
 ような共通の数学的枠組みを持つ。

すなわち、

$$\mu(x) = \mu_s(x) \frac{\phi(x; \mathbf{P})}{\exp \{ 1 - \phi(x; \mathbf{P}) \}} \dots\dots\dots (2.20)$$

ここに、 $\mu(x), \mu_s(x)$ はそれぞれ任意の人口の死力であり、 $\phi(x; \mathbf{P})$ は以下に示す関数で、モデルご  
 とに異なる。 $\mathbf{P}$ はパラメータのベクトルを表す。

$$\text{モデル 1 : } \ln \phi(x; \mathbf{P}) = \alpha \dots\dots\dots (2.21.1)$$

$$\text{モデル 2 : } \ln \phi(x; \mathbf{P}) = \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_i(x)}{1 - \ln \mu_s(x)} \right\} \dots\dots\dots (2.21.2)$$

$$\text{モデル 3 : } \ln \phi(x; \mathbf{P}) = \alpha + \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_i(x)}{1 - \ln \mu_s(x)} \right\} \dots\dots\dots (2.21.3)$$



$$\text{モデル4 : } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_i(x)}{1 - \ln \mu_s(x)} \right\} + r \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_j(x)}{1 - \ln \mu_s(x)} \right\} \dots\dots\dots (2.21.4)$$

$$\text{モデル5 : } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \alpha + \beta \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_i(x)}{1 - \ln \mu_s(x)} \right\} + r \ln \left\{ \frac{1 - \ln \mu_j(x)}{1 - \ln \mu_s(x)} \right\} \dots\dots\dots (2.21.5)$$

ここに、 $\mu_i(x)$  と  $\mu_j(x)$  は  $\mu(x)$ ,  $\mu_s(x)$  以外の人口の死力であり、 $\alpha$ ,  $\beta$  および  $r$  はパラメータである。  
 モデル1はモデル3およびモデル5の特別の場合であり、モデル2はモデル3, 4, 5の、またモデル3と4はモデル5のそれぞれ特別な場合である。従ってモデル5は他を全て含み、ここでは最も一般的なモデルとなっている。

4. ロジットモデルの拡張

前節で新たに開発されたモデルも、従来のロジットモデルも、共通して第1節に述べたリレーショナルモデルの一般的枠組みを持つ。従って、前節に展開されたモデルの一般化のための数学的手続きはそのままロジットモデルにも適用される。その際、異なるのはロジットの尺度パラメータに当たるもの(式(2.1)における $\beta$ であり、一般にはロジットモデルによって変換された生存曲線の形状を決定するパラメータとして知られている)が人口によって異なった値をとる点である。

前節に示したのと同様に数多くの拡張が考え得るが、ここではそのうち特に有用と思われる二つのモデルを提案する。以下に従来のロジットモデルおよび拡張された二つのモデルを示す<sup>9)</sup>。

$$\text{ロジット1 : } \ln \frac{1 - p(x)}{p(x)} = \alpha + \beta \ln \frac{1 - p_s(x)}{p_s(x)} \dots\dots\dots (2.22.1)$$

$$\text{ロジット2 : } \ln \frac{1 - p(x)}{p(x)} = \alpha + \beta \ln \frac{1 - p_i(x)}{p_i(x)} + r \ln \frac{1 - p_j(x)}{p_j(x)} \dots\dots\dots (2.22.2)$$

$$\begin{aligned} \text{ロジット3 : } \ln \left( \frac{1 - p(x)}{p(x)} \right) \left( \frac{p_s(x)}{1 - p_s(x)} \right) &= \alpha + \beta \ln \left( \frac{1 - p_i(x)}{p_i(x)} \right) \left( \frac{p_s(x)}{1 - p_s(x)} \right) \\ &+ r \ln \left( \frac{1 - p_j(x)}{p_j(x)} \right) \left( \frac{p_s(x)}{1 - p_s(x)} \right) \dots\dots\dots (2.22.3) \end{aligned}$$

ここに、 $p_i(x)$  等は任意の人口  $i$  の生存関数、 $\alpha$ ,  $\beta$  および  $r$  はそれぞれパラメータである。

9) ロジット変換に含まれる係数 1 / 2 は簡単のため省略した。以後同様。

これらのモデルの導出に用いた数学的手続きは前節のものと同様であるが、ロジットモデルの場合前節で導入された「死亡状況の変化のモード」に見られるようなモデル展開の理論的背景は明瞭でない。

### Ⅲ テストおよび人口学的応用

#### 1. モデル生命表への適用

前章で開発したリレーショナルモデルは、従来のロジットモデル同様、同一人口の死亡状況の変化に伴う年齢パターンの変化を記述したり、複数の人口間の死亡年齢パターンを関係づけることに応用されることが期待できる。死亡の年齢パターンの主要な変異には、本質的に死亡レベルの変化に伴う変異とこれに独立な変異の二つのタイプが存在する<sup>10)</sup>。後者は基本的に生態学的な要因による死因構造の相違によるもので、しばしば地理的な相関を示す<sup>11)</sup>。これら二つの変異は別々に取り扱うことが理論的にも望ましく、また実用上も効果的である。本研究によって開発されたリレーショナルモデルはその理論的背景から、前者の変異すなわち死亡レベルの変化に伴う年齢パターンの変異を効果的に記述することが期待される。ここでは、本モデルシステムの実用化のテストとして、既存の経験的モデル生命表への適用を検討する。モデル生命表へのリレーショナルモデルの適用は、すでに述べたように記述の簡略化、さらには特殊な補間・補外手法を不用にする死亡レベルの連続化などの利点を持つ。なお、ここでは最も広く利用されている Coale と Demeny の地域モデル生命表システムへの適用を試みる。他のシステムへの適用もまったく同様である。

Coale と Demeny は主としてヨーロッパにおける過去 150 年に及ぶ記録の検討に基づいて、性別、地域別にモデル生命表を開発した。すなわち彼らは死亡の年齢パターンに死亡レベルの変化とは異なる、地理的領域に対応した四つの相異なるタイプを見だし、それぞれ "West", "North", "East" および "South" ファミリーと名付け、各ファミリーごとに 25 レベルのモデル生命表を作成したのである。モデル生命表の作成は基本的に年齢別死亡率（または、その対数）の 10 歳時平均余命の上への回帰によっており、女子の平均寿命を指標として、20 歳から 80 歳まで 2.5 歳ごとに表を与えている<sup>12)</sup>。我々のリレーショナルな生命表システムは、各ファミリー内でいくつかの参照すべき年齢パターンを特定し、以下に示す関係式によってそのファミリーに属する任意のレベルの生命表を得ようとするものである。

$$m_i(x) = m_s(x) \phi(x; \mathbf{P}) \exp\{1 - \phi(x; \mathbf{P})\} \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに、 $m_i(x)$ ,  $m_s(x)$  はそれぞれ得ようとする死亡レベルと標準となるレベルの年齢別死亡率であり、 $\phi(x; \mathbf{P})$  はパラメータベクトル  $\mathbf{P}$  を伴った、以下に定義される関数である。

- 
- 10) S. Ledermann and J. Breas, 前掲 (注 4), "Les dimensions de la mortalité", および J. Bourgeois-Pichat, "Factor analysis of sex-age specific death rates", *Population Bulletin of the United Nations*, No 6, 1962, pp. 147-201. 参照。  
 11) S. H. Preston, *Mortality Patterns in National Populations*, New York, Academic Press, 1976, pp. 89-119.  
 12) A. J. Coale and P. Demeny, 前掲 (注 2), *Regional Model Life Tables and Stable Populations*.

$$\text{モデル1: } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \alpha \quad \dots\dots\dots (3.2.1)$$

$$\text{モデル2: } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \beta w(x) \quad \dots\dots\dots (3.2.2)$$

$$\text{モデル3: } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \alpha + \beta w(x) \quad \dots\dots\dots (3.2.3)$$

$$\text{モデル4: } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \beta u(x) + \gamma v(x) \quad \dots\dots\dots (3.2.4)$$

$$\text{モデル5: } \ln\phi(x; \mathbf{P}) = \alpha + \beta u(x) + \gamma v(x) \quad \dots\dots\dots (3.2.5)$$

ここに、 $\alpha$ 、 $\beta$  および  $\gamma$  は死亡レベルを示すパラメータであり、

$$w(x) = \ln \frac{1 - \ln m_L(x)}{1 - \ln m_H(x)}, \quad u(x) = \ln \frac{1 - \ln m_H(x)}{1 - \ln m_M(x)},$$

$$v(x) = \ln \frac{1 - \ln m_L(x)}{1 - \ln m_M(x)}.$$

さらに、 $m_H(x)$ 、 $m_M(x)$  および  $m_L(x)$  はそれぞれ目的とする死亡レベルの範囲にまたがるように採られた参照用の年齢別死亡率である ( $H$ 、 $M$ 、 $L$  はそれぞれ高、中、低死亡レベルを意味する)<sup>13)</sup>。  $u(x)$ 、 $v(x)$  および  $w(x)$  は、ファミリー内における死亡レベル変化の標準年齢パターンと呼ぶべきものである。 $w(x) = v(x) - u(x)$  であることに注意されたい。

これら五つのモデルはそれぞれが独立したシステムであるが、共通の枠組みを持っているために、ここではまとめて評価を行うことにする。

我々は、テストのためにこれらのモデルをまず Coale と Demeny の "West" ファミリーに適用することとし、 $m_s(x)$ 、 $m_H(x)$ 、 $m_M(x)$  および  $m_L(x)$  を与えるレベルとして、レベル13 ( $\%_0 = 50.0$ )、1 ( $20.0$ )、13 ( $50.0$ ) および 25 ( $80.0$ ) を選んだ。これは事実上人類の集団における死亡レベルのほぼ全域を網羅しているが、これとは別に全域をレベル1から13および14から25の二つに分け、それぞれの両端と中位を参照および標準レベルとする当てはめも同様に試みた。これは、範囲が狭いほど当てはめの効率がよいという事実と共に、死亡レベルの改善に伴う死亡の年齢パターンの変化傾向が平均寿命50歳前後を境として大きく変化するという認識に基づく。実際の応用の場面では、モデルが適用される死亡レベルの範囲は平均寿命の幅でせいぜい10歳前後であることを考えると、これでも十分に広い範囲であると言える。

本テストにおいて用いられた  $u(x)$  および  $v(x)$  の値を上述の当てはめの範囲ごとに表1に示した。これらの値と式 (3.1) および (3.2.1) ~ (3.2.5) によって "West" ファミリー中のいくつかの死

13) ここでは式 (2.21.1) ~ (2.21.5) で与えたモデルを若干一般化して、標準レベル  $s$  を参照レベル  $H, M, L$  と独立に任意のものとしている。これはIV章に述べるように "ファミリー" を越えた適用の際に有効となるものであるが、ここでの場合のように同一ファミリー内での適用では、 $s$  として  $H, M, L$  のいずれかを充てるのが実際的である。

表1 死亡レベル変化の年齢パターン：CoaleとDemeny  
による“West”ファミリー女子

age group	for $20.0 < \overset{\circ}{e}_0 < 80.0$		for $20.0 < \overset{\circ}{e}_0 < 50.0$		for $50.0 < \overset{\circ}{e}_0 < 80.0$	
	$u(x)$	$v(x)$	$u_H(x)$	$v_H(x)$	$u_L(x)$	$v_L(x)$
0	- 0.5641	0.7428	- 0.3204	0.2437	- 0.2579	0.4848
1 - 4	- 0.3390	0.7427	- 0.1742	0.1648	- 0.2418	0.5009
5 - 9	- 0.2171	0.5266	- 0.1071	0.1100	- 0.1628	0.3638
10 - 14	- 0.2069	0.5083	- 0.1015	0.1053	- 0.1558	0.3525
15 - 19	- 0.2096	0.4912	- 0.1043	0.1053	- 0.1478	0.3434
20 - 24	- 0.2146	0.4998	- 0.1077	0.1068	- 0.1454	0.3544
25 - 29	- 0.2177	0.4826	- 0.1098	0.1079	- 0.1426	0.3400
30 - 34	- 0.2225	0.4709	- 0.1127	0.1098	- 0.1418	0.3291
35 - 39	- 0.2220	0.4371	- 0.1133	0.1087	- 0.1343	0.3028
40 - 44	- 0.2152	0.3870	- 0.1111	0.1041	- 0.1204	0.2666
45 - 49	- 0.2013	0.3247	- 0.1058	0.0956	- 0.1007	0.2241
50 - 54	- 0.2052	0.3053	- 0.1094	0.0958	- 0.0958	0.2095
55 - 59	- 0.2044	0.2807	- 0.1110	0.0934	- 0.0883	0.1924
60 - 64	- 0.2221	0.2797	- 0.1229	0.0992	- 0.0894	0.1903
65 - 69	- 0.2166	0.2451	- 0.1231	0.0935	- 0.0780	0.1671
70 - 74	- 0.2222	0.2241	- 0.1299	0.0922	- 0.0717	0.1523
75 - 79	- 0.2223	0.1974	- 0.1340	0.0882	- 0.0639	0.1335
80 - 84	- 0.2238	0.1982	- 0.1348	0.0889	- 0.0644	0.1338
85 - 89	- 0.2347	0.2036	- 0.1419	0.0928	- 0.0667	0.1369
90 - 94	- 0.2517	0.2111	- 0.1530	0.0986	- 0.0700	0.1411
95 - 99	- 0.2844	0.2242	- 0.1707	0.1137	- 0.0759	0.1483

for  $20.0 < \overset{\circ}{e}_0 < 80.0$

$$u(x) = \ln \frac{1 - \ln m_1(x)}{1 - \ln m_{13}(x)}, \quad v(x) = \ln \frac{1 - \ln m_{25}(x)}{1 - \ln m_{13}(x)}$$

for  $20.0 < \overset{\circ}{e}_0 < 50.0$

$$u_H(x) = \ln \frac{1 - \ln m_1(x)}{1 - \ln m_7(x)}, \quad v_H(x) = \ln \frac{1 - \ln m_{13}(x)}{1 - \ln m_7(x)}$$

for  $50.0 < \overset{\circ}{e}_0 < 80.0$

$$u_L(x) = \ln \frac{1 - \ln m_{13}(x)}{1 - \ln m_{19}(x)}, \quad v_L(x) = \ln \frac{1 - \ln m_{25}(x)}{1 - \ln m_{19}(x)}$$

ここに、 $m_i(x)$ は、CoaleとDemenyのモデル生命表“West”ファミリー女子のレベル*i*における年齢別死亡率 ( ${}_n m_x$ )を表す。

亡レベルについて直線回帰による当てはめが試みられ、その適合性が  $\chi^2$  の平方根、すなわち、

$$\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\sum \{m_i(x) - \hat{m}_i(x)\}^2 / \hat{m}_i(x)}$$

によって比較された。ここで、 $\hat{m}_i(x)$  は  $m_i(x)$  の各モデルによる推定値である。なお、従来のロジットモデルおよび今回拡張されたロジットモデルに対しても当てはめを行い同様の指標を算出した。

ロジット各モデルの実用的な形は以下の通りである。

$$\text{ロジット 1 : } \ln \frac{1 - p_i(x)}{p_i(x)} = \alpha + \beta \ln \frac{1 - p_s(x)}{p_s(x)} \dots\dots\dots (3.3.1)$$

$$\text{ロジット 2 : } \ln \frac{1 - p_i(x)}{p_i(x)} = \alpha + \beta \ln \frac{1 - p_H(x)}{p_H(x)} + \gamma \ln \frac{1 - p_L(x)}{p_L(x)} \dots\dots\dots (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{ロジット 3 : } \ln \left( \frac{1 - p_i(x)}{p_i(x)} \right) \left( \frac{p_s(x)}{1 - p_s(x)} \right) &= \alpha + \beta \ln \left( \frac{1 - p_H(x)}{p_H(x)} \right) \left( \frac{p_s(x)}{1 - p_s(x)} \right) \\ &+ \gamma \ln \left( \frac{1 - p_L(x)}{p_L(x)} \right) \left( \frac{p_s(x)}{1 - p_s(x)} \right) \\ &\dots\dots\dots (3.3.3) \end{aligned}$$

ここに、 $p_i(x)$ 、 $p_s(x)$ 、 $p_H(x)$  および  $p_L(x)$  はそれぞれ目的となる死亡レベル、標準レベルおよび高低二つの参照レベルにおける生存関数であり、 $\alpha$ 、 $\beta$  および  $\gamma$  はパラメータである。

これら、ロジットモデルは、ロジット 1 に関しては従来から行われている群平均法により、また 2 と 3 に関しては直線回帰により生存関数の当てはめがなされた後、二重対数モデルとの比較のため、これを年齢別死亡率に変換して適合度が計算された<sup>14)</sup>。表 2 にそれらすべてのモデルに対する当てはめの結果を示した。また、図 2 には全範囲に対する適合の様子がグラフによって示されている。

これらを比較すると、予期される通り、より多くの参照レベルとパラメータを用いたモデルほど適合度はよくなっている。すなわち、参照レベルを三つ用いたモデル 4 および 5 は同二つのモデル 2、3 より適合度はよく、参照レベルが同数の場合にはモデル 2 より 3、4 より 5 というようにパラメータの数に従って適合度は増加する。但し、参照レベルの追加はパラメータの追加よりはるかに効果的である。また、モデル 5 とロジット 3 で見られるように、同数の参照レベルおよびパラメータを持つ場合はロジットモデルよりも二重対数モデルの方が適合度に優れていることが観察される。また、モデル 2、3 は共にロジット 2 と同じ二つの参照レベルを持つが、いずれもパラメータ数がこれより少ないにもかかわらず、若干の周辺のレベルを除いて適合度に優っている。特にモデル 2 は一つのパラメータしか要さないことは、注目に値する。

14) 年齢 5 歳以下を適用外としたモデル 1 を除いて、各モデルはすべて年齢 0～89 に対して当てはめがなされた。また、ロジット 1 での群平均に用いられた年齢グループは、0～39 および 40～89 である。

表2 " West " ファミリー女子に対する各モデルの適合度

	全範囲 (20.0 < e <sub>0</sub> <sup>o</sup> < 80.0) への当てはめ					
	死亡レベル (e <sub>0</sub> <sup>o</sup> )					
	25.0	35.0	45.0	55.0	65.0	75.0
モデル1	0.019	0.027	0.015	0.027	0.105	0.240
モデル2	0.151	0.057	0.010	0.012	0.047	0.116
モデル3	0.144	0.054	0.010	0.007	0.032	0.085
モデル4	0.008	0.009	0.003	0.009	0.018	0.017
モデル5	0.006	0.008	0.003	0.005	0.005	0.005
ロジット1	0.100	0.058	0.022	0.034	0.114	0.253
ロジット2	0.049	0.091	0.093	0.070	0.038	0.013
ロジット3	0.013	0.017	0.008	0.012	0.026	0.019

	半分の範囲 (20.0 < e <sub>0</sub> <sup>o</sup> < 50.0) への当てはめ						半分の範囲 (50.0 < e <sub>0</sub> <sup>o</sup> < 80.0) への当てはめ					
	死亡レベル (e <sub>0</sub> <sup>o</sup> )						死亡レベル (e <sub>0</sub> <sup>o</sup> )					
	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	57.5	62.5	67.5	72.5	77.5
モデル1	0.035	0.014	0.003	0.002	0.006	0.017	0.098	0.064	0.024	0.028	0.099	0.181
モデル2	0.025	0.008	0.001	0.002	0.010	0.025	0.019	0.010	0.004	0.007	0.018	0.013
モデル3	0.025	0.008	0.001	0.002	0.010	0.024	0.018	0.008	0.002	0.004	0.009	0.010
モデル4	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.001	0.004	0.004	0.003	0.007	0.018	0.009
モデル5	0.001	0.001	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.001	0.001	0.004	0.006	0.003
ロジット1	0.073	0.036	0.010	0.009	0.026	0.044	0.118	0.076	0.029	0.035	0.114	0.215
ロジット2	0.011	0.025	0.030	0.028	0.021	0.009	0.007	0.013	0.019	0.025	0.021	0.010
ロジット3	0.002	0.003	0.001	0.001	0.002	0.002	0.004	0.005	0.003	0.006	0.009	0.004

同様の手続きによって、それらのモデルを Coale と Demeny の与えた全てのファミリーに適用した結果を表3に示す。ただし、この際適合度は次に示すような指標を用いて各ファミリーの代表値とした。すなわち、

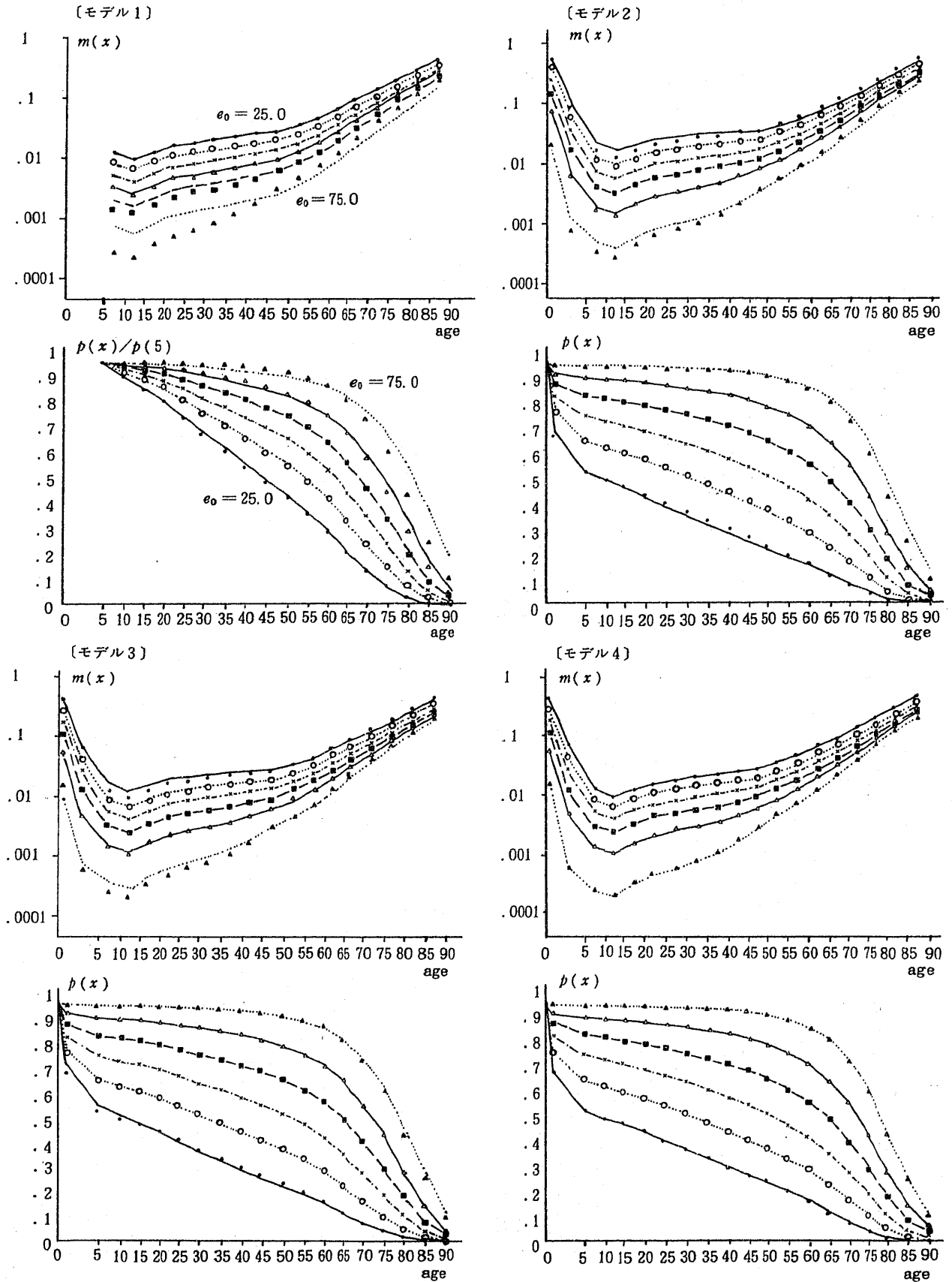
$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum x^2}$$

ここで、 $n$  は各ファミリーにおいて当てはめに用いたレベルの数である。

以上の結論として、モデル4、5およびロジット3はその経験的モデル生命表への当てはめにおいて、従来のロジットモデルに較べ精度の点では極めて優れていると言える。事実、グラフ上においてははいずれもその誤差は確認できない程度のものである。また、モデル2、3およびロジット2は適合度においては中程度であるが、従来のロジットモデルより優れており、特に適用範囲を二分した場合などには実用上十分な精度を備えていると言える。

ところで、モデル2は、パラメータを一つしか要さないため、その形態をさらに簡略化することができる。すなわち、式(3.1)および(3.2.2)は、

図2 Coale と Demeny の “ West ” ファミリー女子  
 に対する各モデルの当てはめ



(注) 横軸 0-5 歳は間隔を 2 倍に引き伸ばしてある。

図2 Coale と Demeny の " West " ファミリー女子  
 に対する各モデルの当てはめ (つづき)

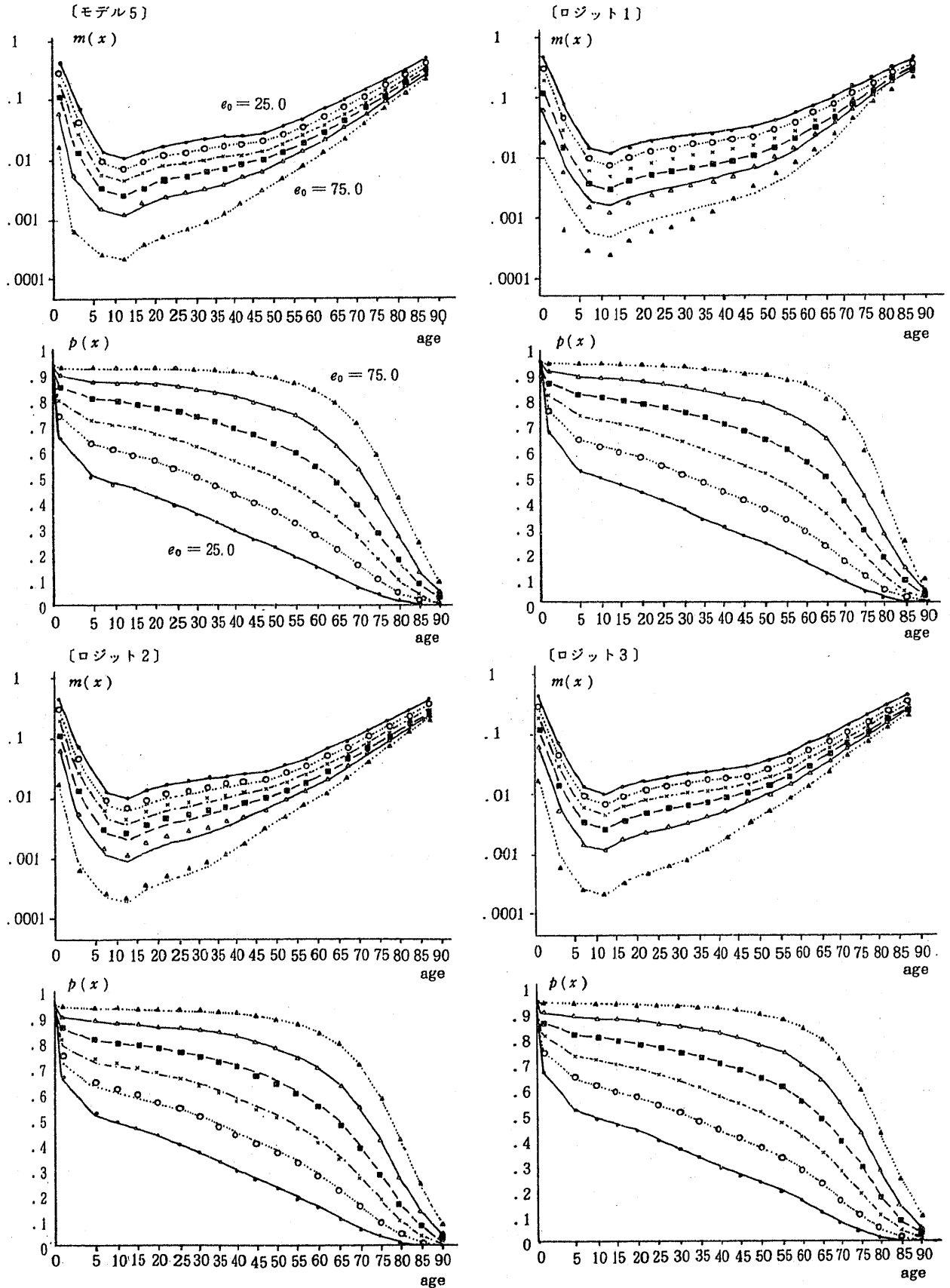




表3 Coaleと Demenyのモデル生命表に対する各モデルの適合度のまとめ

ファミリー		モデル1	モデル2	モデル3	モデル4	モデル5	ロジット1	ロジット2	ロジット3
Coale & Demeny (1983)									
全範囲 (レベル1~25) への当てはめ <sup>1)</sup>									
WEST	female	0.109	0.084	0.073	0.012	0.006	0.124	0.066	0.017
	male	0.097	0.072	0.065	0.013	0.004	0.113	0.061	0.016
NORTH	female	0.081	0.092	0.083	0.009	0.007	0.154	0.113	0.034
	male	0.073	0.084	0.080	0.010	0.007	0.149	0.117	0.019
EAST	female	0.081	0.074	0.072	0.013	0.004	0.134	0.072	0.018
	male	0.077	0.061	0.059	0.014	0.003	0.143	0.037	0.016
SOUTH	female	0.067	0.063	0.062	0.008	0.005	0.105	0.077	0.014
	male	0.066	0.053	0.051	0.010	0.004	0.114	0.056	0.015
半分の範囲 (レベル1~13) への当てはめ <sup>2)</sup>									
WEST	female	0.018	0.016	0.016	0.002	0.001	0.045	0.018	0.002
	male	0.018	0.017	0.016	0.004	0.002	0.040	0.018	0.004
NORTH	female	0.052	0.016	0.015	0.003	0.002	0.075	0.018	0.005
	male	0.065	0.017	0.015	0.004	0.002	0.086	0.025	0.010
EAST	female	0.033	0.019	0.018	0.006	0.002	0.054	0.025	0.004
	male	0.018	0.020	0.017	0.008	0.001	0.041	0.020	0.003
SOUTH	female	0.050	0.022	0.021	0.003	0.002	0.055	0.036	0.007
	male	0.029	0.018	0.018	0.003	0.002	0.045	0.029	0.003
半分の範囲 (レベル14~25) への当てはめ <sup>3)</sup>									
WEST	female	0.113	0.015	0.011	0.011	0.004	0.032	0.014	0.006
	male	0.095	0.012	0.008	0.009	0.004	0.121	0.012	0.005
NORTH	female	0.077	0.025	0.017	0.008	0.004	0.113	0.009	0.041
	male	0.052	0.021	0.016	0.009	0.003	0.124	0.007	0.007
EAST	female	0.082	0.015	0.010	0.010	0.004	0.135	0.010	0.006
	male	0.073	0.015	0.008	0.007	0.003	0.147	0.012	0.006
SOUTH	female	0.057	0.013	0.006	0.005	0.005	0.093	0.009	0.005
	male	0.061	0.013	0.006	0.005	0.004	0.103	0.010	0.006

\*モデル1は年齢5-89, 他はすべて0-89に当てはめた。

1) レベル3, 7, 11, 15, 19および23の平均

2) レベル3および11の平均

3) レベル15および23の平均

$$\ln \{ 1 - \ln m_i(x) \} = \beta \ln \{ 1 - \ln m_L(x) \} + (1 - \beta) \ln \{ 1 - \ln m_H(x) \} \quad \dots \dots \dots (3.4)$$

と変形できる。ただし、この場合  $m_H(x)$  は参照レベルであると同時に標準レベル (式 (3.1) における  $m_s(x)$ ) も兼ねている。

これは、任意の死亡レベルの年齢別死亡率がその二重対数をとることによって他の二つのレベルの直線補間 (または補外) として与えられることを示しており、パラメータ  $\beta$  はその補間 (補外) 係数となっている ( $0 < \beta < 1$  のとき補間であり、 $\beta > 1$  のとき補外になる)。このことをグラフによって表したものが図3である。この図では Coale と Demeny の "West" ファミリー女子 ( $60.0 < e_0 < 80.0$ ) について、彼らの表から計算された各年齢での

$$\ln \left\{ \frac{1 - \ln m_i(x)}{1 - \ln m_H(x)} \right\} / \ln \left\{ \frac{1 - \ln m_L(x)}{1 - \ln m_H(x)} \right\}$$

の値をドットで、またその平均によって与えられる  $\beta$  の推定値を破線で示してある。ここで  $H$  としてレベル17 ( $e_0 = 60.0$ ),  $L$  としてレベル25 ( $80.0$ ) をとった。

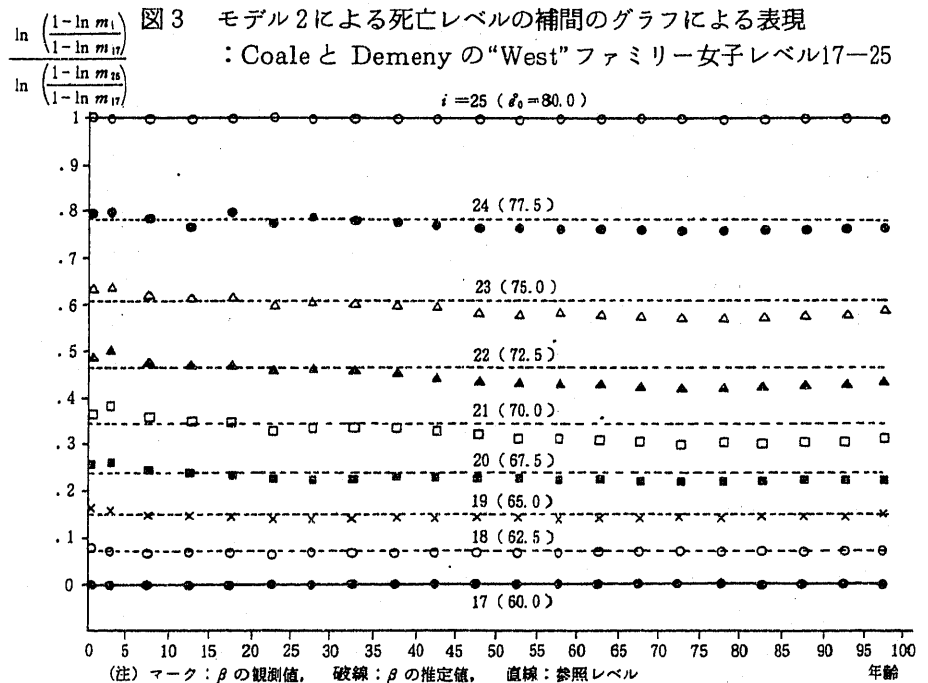
## 2. 死亡の年齢パターンの将来推計

通常、実際の人口の年次に伴う死亡の年齢パターンの変化は、Coale と Demeny の言う同一「ファミリー」内の変化と考えられる。従って前節に

において述べたリレーショナルモデルのモデル生命表への適用の手続きは、そのまま実際人口の死亡の年齢パターンの年次間の補間・補外に應用できる。この場合、特に将来に向かって補外を行えば将来推計となる<sup>15)</sup>。

これまでに述べたどのモデルもこの目的に用いることが可能であるが、モデル2はすでに述べたようにその扱いにおいて有利な面があるので、本稿においてはこれを用いた推計について述べたい。

二つの隔たった年次  $t_1, t_2$  における年齢別死亡率を既知とし、これを  $m_{t_1}(x)$  および  $m_{t_2}(x)$  によって表す。すると、任意の年次  $t$  の年齢別死亡率  $m_t(x)$  は、



15) リレーショナルモデルの将来推計への應用は Brass により議論されている。W. Brass, *Population Projections for Planning and Policy* (Papers of the East-West Population Institute, No. 55), Honolulu, East-West Population Institute, 1978.

$$\ln \{ 1 - \ln m_t(x) \} = \beta \ln \{ 1 - \ln m_{t_1}(x) \} + (1 - \beta) \ln \{ 1 - \ln m_{t_2}(x) \} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

によって与えられる。ここに、 $\beta$  は前と同様に補間（補外）係数である。

この  $\beta$  は年齢別死亡率のデータが得られる年次については、たとえば、各年齢での

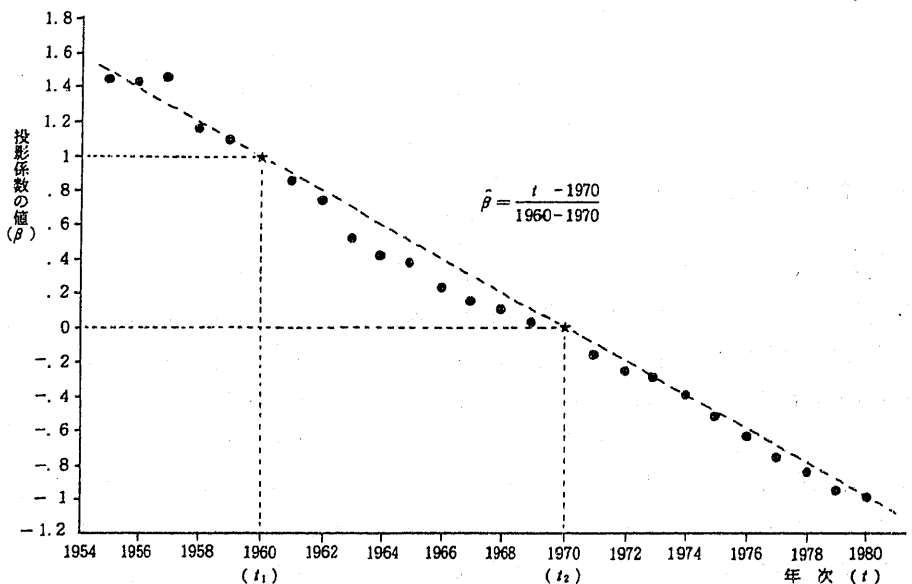
$$\ln \left\{ \frac{1 - \ln m_t(x)}{1 - \ln m_{t_2}(x)} \right\} / \ln \left\{ \frac{1 - \ln m_{t_1}(x)}{1 - \ln m_{t_2}(x)} \right\}$$

の値の平均をとることによってその観察値が得られる。これを日本の女子の1954年から1980年までの各年について求めたものを図4のグラフ上にドットとして示した（ただし、 $t_1 = 1960$ ,  $t_2 = 1970$ ）。

図によれば、 $\beta$  の年次的トレンドは直線性が高く、座標上の二点（1960, 1）および（1970, 0）を通る直線によって効果的に近似されることがわかる

（図中の破線）。各年の年齢別死亡率が未知であるものとすれば、この直線上の点を各年次における  $\beta$  の推定値として式（3.5）によって任意の年次の年齢別死亡率が推計できる。実際にこの方法によって、日本人女子について推計を行った結果の観測値に対する適合度を前節と同様に求め、表

図4 日本人女子における投影係数  $\beta$  の年次変化：1955—80



4に示した。また、図5はそのうちいくつかの年次について、適合の様子をグラフによって示したものである。

この推計方法の最大の利点は、その簡便さにある。ここではパラメータを推定するための込み入った手続きは必要なく、単に、

$$\hat{\beta} = (t - t_2) / (t_1 - t_2)$$

によって得られる  $\beta$  の推定値を式（3.5）に代入するだけである。この簡便さは、二つの時点  $t_1, t_2$  における死亡の年齢パターンが、単に年齢パターンの参照のみでなく、パターンの変化の時間的テンポの情報をも与えていることによってもたらされる。

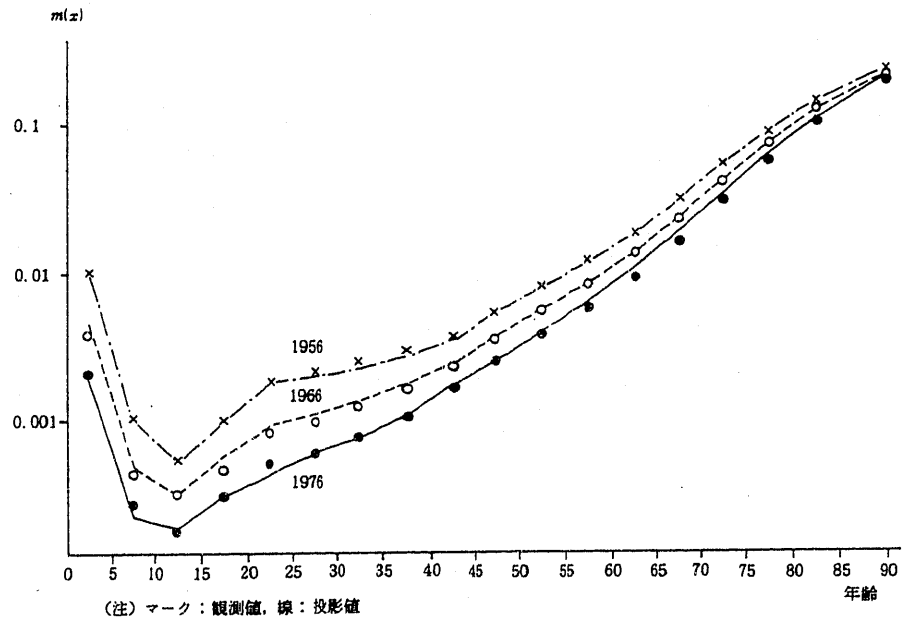
本手法を推計に実用する際、二年次より多くの時点でのデータが得られる場合には、参照年の組合せを変えて得られる結果を平均するなどによって、推計の頑健性 robustness を増す工夫をすることが望ましい。

表4 死亡の年齢パターンの投影の適合度：  
日本人女子, 1954-80

年次	$\hat{\beta}$	$\sqrt{\chi^2}$
1954	1.6	0.084
1956	1.4	0.029
1958	1.2	0.070
1960*	1.0	—
1962	0.8	0.027
1964	0.6	0.036
1966	0.4	0.039
1968	0.2	0.026
1970*	0.0	—
1972	-0.2	0.054
1974	-0.4	0.029
1975	-0.5	0.053
1976	-0.6	0.059
1978	-0.8	0.096
1980	-1.0	0.096

\*参照年.

図5 日本人女子の死亡の年齢パターンの投影：1956, 1966 および 1976



#### IV 応用の発展と課題

我々の開発したリレーショナルモデルおよび拡張されたロジットモデルはいずれも基礎的な人口学的応用において、それぞれに満足すべき適合性を示した。両者は応用の場においてそれぞれに特有の利点を持ち、目的に応じて相補的に用いることも有効であると考えられる。すなわち、ロジットモデルは頑健性において年齢別死亡率に優る生存関数を対象にしたモデルであるため、推計の結果においてもより頑健であることが期待される。特に二重対数モデルにおいて不安定さが見られる5歳以下への適用は有効と思われる。逆にロジット変換の性質上生存関数が0に近づく高年齢では、ロジットモデルは不安定となる。一方の二重対数モデルは高年齢で安定的である。また二重対数モデルの独自の実用的利点の一つは、それが年齢別死亡率を変換の対象としているために、必ずしも生命表の作成が前提とならないことである。実際、Ⅲ章2節における日本人女子の死亡年齢パターンの将来推計に関する応用例では、人口から直接に観察される年齢別死亡率を用いている。もちろん生命表から二次的に得られる年齢別死亡率を用いても手続きはまったく同様である。

二重対数モデルは、実用的応用とは別にその理論的背景から、さまざまな死亡分析へ分析手段として応用することが考えられる。一例としては、そのパラメータを死亡状況の分析指標に活用することが考えられる。たとえば、モデル2のパラメータ $\beta$ は単独で死亡レベルを表していると考えられるから、これを人口の死亡レベルの指標とすることができる。とくに $\beta$ は近年の先進国における平均寿命に見られるような顕著な天井効果を示さないで、死亡分析の面からはより有効な指標となる可能性がある。その他分析的応用の重要なものとしては、本稿で生命力 $V(x)$ と呼んだ量の加齢、死亡過程に対する計量生物学的な分析への応用が挙げられるが、ここでは詳しく述べない。

本稿で提案したリレーショナルモデルは、基本的に同一のファミリー内における死亡レベルの変化に伴うその年齢パターンの変化を記述するものであった。すなわち、応用に際してはファミリーごとに特定の死亡の標準年齢パターン $(m_s(x))$ と死亡変化の標準年齢パターン $(u(x), v(x))$ を用意する必要がある。これは既存の経験的モデル生命表のファミリーに属さない人口などにおいて、大きな

制約である。これに対する一つの簡単な対応策は、特定の死亡変化の標準年齢パターンを任意のファミリーに対してのことである。これは死亡レベル変化の標準年齢パターンは死亡そのものの標準年齢パターンほどはファミリー間で変異しないことに基づく。具体的には、表1に与えたCoaleとDemenyの“West”女子のものを任意のファミリーに流用することが考えられる。その際、死亡の標準年齢パターンは目的のファミリーのものをを用いるのである。さらに、Zabaによって提案されたロジットモデルにおける標準年齢パターンの修飾の技法<sup>16)</sup>などと組合せることによって、死亡の標準年齢パターンさえも一般化して、ごく少数のパラメータの追加によって任意のファミリー間に自由に適用できるユニバーサルなリレーショナルモデルを考案することが可能であると考えられる。

---

16) B. Zaba, "The four-parameter logit life table system", *Population Studies*, vol. 33, No. 1, 1979, pp. 79-100.

## Development of New Relational Models for Age Pattern of Mortality

Ryuichi KANEKO

In the practical fields of demography, the relational model of age pattern of mortality such as the logit model introduced by Brass (1968) has some superior nature to both the analytical and the empirical models. It provides parsimonious description of the age pattern without loss of practical accuracy. But the logit model itself is less sufficient in accuracy as compared with the empirical model life tables. The ambiguous theoretical background of its applicability to the mortality process is also limitation in applying for analytical studies.

In this paper, we propose new relational models for age specific mortality rates, which are derived from mathematical formulations of the aging and mortality process. Five relational models with a common framework varied from one to three-parameter are newly developed. On the other hand, the related mathematical extensions of the conventional logit model are also proposed. They are all tested their applicability as model life table systems and projection tools of age pattern of mortality in time series. The results indicate that those relational models serve as useful demographic tools for estimation and projection besides its original use in analytical studies of aging and mortality process. The practical forms of the models are presented in equation (3.1), (3.3.1)–(3.3.5) and (3.3.1)–(3.3.5) in the text. Their further applications are also briefly discussed.