

特集：全国将来人口推計とその応用に関する研究（その1）

死亡率曲線の自由な方向への変化を表現する 数理モデルとわが国の将来生命表への応用

石 井 太

本研究は、わが国の死亡動向に適したモデルを開発する観点から、死亡率曲線の自由な方向への変化を表現する数理モデルを提案するとともに、わが国の将来生命表への応用を目的として行ったものである。

本研究では死亡率曲線の自由な方向への変化を数理モデルによって表現するためのフレームワークとして、対数死亡率曲面上の接ベクトル場の利用が有効であることを示すとともに、さらにこのようなモデリングに応用しやすく、効率的に高齢死亡率を表現可能な「シフト」型モデルである線形差分 (LD) モデルを提案した。

そして、この方法論を利用し、わが国の死亡率にあてはめることにより、モデルの評価を行った。実績値にリー・カーター・モデル (LC) と LD の両モデルをあてはめたところ、年齢が若いところでは LC モデルのあてはまりがややよい一方、高齢層では LD モデルがよくあてはまっている点が確認できた。また、このパフォーマンスの違いについて統計的観点からの比較を行い、低い年齢層では LC モデルのパフォーマンスがやや上回る部分があるものの、高齢層では LD モデルが LC モデルを上回っており、わが国の高齢死亡率は低下型よりもシフト型の改善をしていることが確認されたとともに、若年層では LC モデル、高齢層では LD モデルを用いることの有効性が示された。このような観察に基づき、両者のベクトル場に属するベクトルを一定のウエイトを用いて加重平均することにより LC モデルから LD モデルへと連続的につながるようなベクトル場を定義し、全年齢死亡モデルである TVF モデルを提案した。

次に、TVF モデルの生命表の将来推計への応用例として、平成24年推計における死亡率の将来推計法やその評価について述べた。TVF モデルによる対数死亡率の相対的水準の観察からは、LC モデルでは表現できなかった、死亡率改善が大きい部分が高齢側へシフトする動きが表現されるとともに、将来投影値についても同様の傾向が反映されるものとなっている。また、死亡率改善が非常に進んだ仮想的な状況を考察し、TVF モデルでは LC モデルで現れたような対数死亡率曲線の不自然な年齢パターンは生じず、生存数曲線もわが国の近年の死亡動向と整合的なものとなっていた。このように、TVF モデルによる将来推計は、LC モデルによるものと比較して、様々な有効性があることが明らかとなった。

はじめに

わが国の平均寿命は、第二次大戦直後は国際的に低いレベルにあったにもかかわらず、戦後、急速な伸長を遂げ、現在では国際的に見てトップクラスの水準にありつつも、さらに伸長を続けているという特徴を有している。このような、わが国の死亡動向を分析し、また、その将来推計を行うためには、死亡のモデリングが重要となる。

しかしながら、このような、先進諸国の中でも独特の様相を呈しているわが国の死亡モデリングにあたっては、これまで諸外国等で用いられてきている既存のモデルをそのまま

適用するのでは必ずしも十分といえない側面があり、わが国の死亡状況により適合したモデル開発が求められる。本研究は、このような問題意識の下、わが国の死亡動向の表現に適し、また柔軟性の高い数理モデルを開発するとともに、その将来推計への応用を行うことを目的とするものである。

I 死亡モデルとその将来推計への応用に関する先行研究

1. 死亡の年齢パターンモデル

最初に、死亡モデルとその将来推計への応用に関し、本研究の直接的な先行研究を中心としてレビューを行う。人口動態事象は年齢によってその頻度が大きく異なるものがあるが、死亡もその代表例である。一般に、年齢別に死亡率を見ると精密に観察を行うことができるが、多くの率を取り扱う必要性が生じるため、複雑さも増大することとなる。したがって、死亡率などの死亡を表現する生命表関数を、単純な法則や規則を用いて簡約化して表すことができると便利であり、これを実現するのが死亡の年齢パターンモデルである。

死亡の年齢パターンモデルには、大きく分けて、(1)数学的関数によるモデル、(2)数表によるモデル、(3)リレーショナルモデルの3種類がある。(1)の数学的関数によるモデルとは、年齢の数学的関数によって生命表関数を表現するものであり、死亡法則 (law of mortality) とも言われる。これには多くの先行研究があるが、死力を年齢の指数関数で表す Gompertz モデル (Gompertz 1825) はその代表例である。また、これに定数項を加えた Gompertz-Makeham モデル (Makeham 1860) は、現在、厚生労働省が作成する完全生命表・簡易生命表で用いられている。一方、これらの指数関数では超高年層での死亡率を過大推定してしまうことがしばしば観察されることから、加齢に応じて死力の傾きが逡減するロジスティック関数で死力を表現する Perks (1932), Beard (1971) のような先行研究がある。

これらを含め、Thatcher et al. (1998) は、13カ国の80~120歳の高齢死亡率データに対し、6種類の数学的関数を当てはめ、モデル間の比較検討を行った。ここで比較対象となったモデルは、

1. Gompertz: $\mu_x = ae^{bx}$
2. Weibull: $\mu_x = ax^b$
3. Helligman & Pollard: $q_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$
4. Quadratic: $\ln(\mu_x) = a+bx+cx^2 \quad (c < 0)$
5. Logistic: $\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}} + c$
6. Kannisto: $\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$

であるが、このうち、最もパフォーマンスが高かったものは、Logistic と Kannisto の二種類のロジスティックモデルであり、特に、Kannisto は二つだけのパラメータで高齢死亡率をよく表現できるという利点があるとされている。また、これに基づき、Human Mortality Database の高齢部分のあてはめにもこのモデルが用いられている。

また、本研究では全年齢の死亡モデルを対象とするが、高齢部分だけではなく、全年齢を対象とした数学的モデルについても多数の先行研究が存在する。Gage and Mode (1993) はこのようなもののうち、Siler (1979), Heligman and Pollard (1980), Mode and Busby (1982), Mode and Jacobson (1984) による 4 種類の全年齢モデルの比較を行い、8 パラメータの Mode-Busby モデルは若年層での当てはまりに、同じく 8 パラメータの Heligman-Pollard は高齢層での当てはまりに問題があり、Siler の 5 パラメータモデルの方があてはまりがよいとしている。10 パラメータの Mode-Jacobson モデルは Siler のモデルよりはよいが、パラメータ数の多さから信頼性に注意が必要であると論じており、数学的関数による全年齢モデルの難しさが示されている。

一方、(2)の数表によるモデルは、経験に基づくいくつかの数表によって生命表関数を表現するものである。Coale-Demeny のモデル生命表 (Coale and Demeny 1983) がその代表例であり、生命表の形状 (シェイプ) を 4 種類 (North, South, East and West) に分け、それぞれに 25 のレベルから成るモデル的な生命表を用意して様々な生命表を表現している。

数学的関数によるモデルは、生命表関数を数少ないパラメータで表現でき、豊富な情報を簡約化して表現できるという点で優れているが、一方で、実際の死亡の年齢パターンは複雑であり、必ずしも既知の数学的関数で表されるとは限らない。また、これを改善するために複数の数学的関数を組み合わせていくと、多くのパラメータが必要となってかえって複雑性を増してしまうという問題点がある。これに対し、数表によるモデルは、実際に経験された年齢パターンから作成されることから、このような数学的関数によるモデルのような制約はない。しかしながら、この方法では、それぞれのレベルや形状の種類に対応した数表を用意しなければならないため、レベルや形状を細分化していくと、膨大な数の数表が必要となり、やはり複雑性が増大してしまうという問題点がある。

(3)のリレーショナルモデルは、この二つのモデルの長所を採り入れたモデルともいうことができ、経験に基づく (数表による) 標準的な年齢パターンと、そこからの変化に関するパラメータを組み合わせる死亡パターンを表現するものである。リレーショナルモデルの代表例としては、Brass (1971) により開発されたブラス・ロジットシステムが挙げられる。ブラス・ロジットシステムは、 l_x をロジット変換した関数 $Y_x = \log\left(\frac{l_x}{1-l_x}\right)$ を考え、ある基準となるパターン Y_x^s を用いて、任意の Y_x^a が、 $Y_x^a = \alpha + \beta Y_x^s$ と表されるとするモデルである。ここで、 α がレベル、 β が形状を表すパラメータとなっている。

2. 死亡の年齢・時系列パターンモデル

ここまで、単に年齢パターンについて考えてきたが、例えば死亡率の将来推計を行う場合、さらに死亡の年齢・時系列パターンをモデル化することが必要となる。これは、例えば、生命表関数として対数死亡率 $\log m_x$ をモデリングする場合、さらに時刻 (t) を新たな次元として追加した $\log m_{x,t}$ をモデリングする問題を考えることに相当する。

死亡の年齢・時系列パターンのモデル化に対しても、いくつかのアプローチが可能であり、各種の先行研究が存在している。最も単純なものとして、各 x を固定し、 $\log m_{x,t}$ を t の関数と考えて数学的関数をあてはめるモデリングが考えられるが、このためには年齢の数だけ異なる数学的関数を用意する必要が生じるため煩雑なモデルになってしまう。そこで、死亡の年齢パターンモデルを組み合わせることが考えられる。例えば、年齢パターンについて数学的関数によるモデルを用い、そのパラメータの時系列変化にさらに数学的関数を当てはめれば、年齢・時系列パターン全体を数学的関数を用いてモデリングすることができる。また、モデル生命表との組合せとして、生命表の形状は固定し、レベルを表す指標（平均寿命など）に数学的関数を当てはめるモデリングも可能であり、国連の World Population Prospects では、直近の死亡の年齢パターンが得られない場合、または得られても信頼性が低いと考えられる場合、生残率の推定においてこの方法を用いている (United Nations 2006)。

リレーショナルモデルについても、数学的関数によるモデル同様、パラメータに何らかの数学的関数を当てはめることによって年齢・時系列パターンのモデル化が可能である。現在、国際的にも死亡率の将来推計の標準的な方法として使われているリー・カーター・モデル (LC モデル) は以下のような式で表されるモデルであり、年齢・時系列パターンを表すリレーショナル・モデルの代表的な先行研究である (Lee and Carter 1992)。

$$\log m_{x,t} = a_x + k_t b_x + \epsilon_{x,t}$$

ここで、

$\log m_{x,t}$: 対数死亡率

a_x : 対数死亡率の標準的な年齢パターン

k_t : 死亡水準 (死亡指数)

b_x : k_t が変化する時の年齢別死亡率の変化

$\epsilon_{x,t}$: 平均 0 の残差項

である。

Tuljapurkar et al. (2000) はこのモデルを G7 諸国の死亡率推計に適用しその有効性を示しているが、わが国の死亡率に適用した先行研究も多くのある。Wilmoth (1996) は、リー・カーター・モデルを日本の全死因の死亡率に適用し (Method I)、これをスウェーデンの死亡率推計の将来トレンドに一致させた推計 (Method II) と比較するとともに、死因別死亡率推計 (Method III 及び IV) とも比較を行った。小松 (2002)

はリー・カーター・モデルを利用し、国立社会保障・人口問題研究所の平成14年将来人口推計において用いられた死亡モデルの研究・開発にあたった。さらに、小川 [等] (2002), 南條・吉永 (2003), 小暮・長谷川 (2005), Ozeki (2005), 及川 (2006) などわが国への適用としての先行研究に挙げられる。

一方、リー・カーター・モデルを拡張する研究も、Li and Lee (2005), De Jong and Tickle (2006) など様々なものが存在し、わが国でも井川 (2012) が LC モデルの残差に VAR モデルを適用して LC モデルを拡張した LC-VAR モデルを提案している。このような LC モデルの拡張に関する研究の中で、石井 (2008) は、成人死亡率改善を死亡率曲線の高齢側への「シフト」として捉える Bongaarts (2005) のシフティング・ロジスティック・モデルと LC モデルを組み合わせることにより、わが国の近年の高齢死亡率改善により適合した死亡率モデルである「年齢シフトモデル」を提案した。

本研究は、この年齢シフトモデルで採られた死亡率曲線の高齢側への「シフト」というアプローチを発展させ、より一般的な方向への死亡率曲線の変化を表現する数理モデルの概念を用いて、わが国の死亡動向の表現に優れた死亡モデルを提案するものである。

II データと方法論

1. データ

本研究において基礎とした死亡データは、国立社会保障・人口問題研究所「わが国の長寿化の要因と社会・経済に与える影響に関する人口学的研究」プロジェクトにおいて作成された「日本版死亡データベース (JMD)」の、昭和45 (1970) ~平成22 (2010) 年の死亡率である。JMD とは、国際的な死亡データベースである Human Mortality Database の方法論を基礎としつつ、わが国の死亡状況にあわせて改良を行って構築した、日本の生命表のデータベースである。なお、JMD では110歳以上は開放区間としてまとめられているため、 m_x に2パラメータロジスティック曲線をあてはめて補外し、150歳までの死亡率を求めて推定に使用した。

2. 死亡率の時間的变化による表現

本研究では先に述べた通り、年齢シフトモデルで採られた死亡率曲線の高齢側への「シフト」というアプローチを発展させ、より一般的な方向への死亡率曲線の変化を表現する数理モデルを提案する。

一般に、リレーショナルモデルを用いた死亡の年齢・時系列パターンモデルでは、時刻によらない標準的な年齢パターンと、任意の時刻における標準的な年齢パターンとの差異がパラメータを用いて表現される。標準的なパターンを固定した場合、時系列変化を表すのは標準的な年齢パターンとの差異の部分であるが、これは各時刻において死亡率曲線がどのように変化しているかを表現することによってもモデリング可能である。したがって、リレーショナルモデルを用いた対数死亡率のモデリングとは、「対数死亡率の時間変化のモデリ

ング」とも捉えることができる。

このことについて、具体的に LC モデルで見てみよう。誤差項を省いた LC モデルの式である $\log m_{x,t} = a_x + k_t b_x$ を t で偏微分することにより、

$$\frac{\partial \log m_{x,t}}{\partial t} = \frac{\partial k_t}{\partial t} b_x$$

を得る。これは、対数死亡率の時間変化が、全体の強度は $\frac{\partial k_t}{\partial t}$ により異なるものの、その年齢分布は b_x で一定であることを示している。そして、この符号を変えたものは、一般に死亡率改善率と呼ばれる量であることから、リー・カーター・モデルは死亡率改善率の年齢分布が一定であるモデルであるということもできる。

ところで、死亡率改善率が示す「時間変化」は、それぞれの年齢 x について対数死亡率がどのくらい低下するかを捉えている。一方、わが国の高齢死亡率改善は、LC モデルのように、 x を固定して対数死亡率が低下する方向に対数死亡率曲線が変化していくと考えるよりも、対数死亡率値を固定してこれに対応する年齢 x が高齢の方に変化していくという方向で捉えた方が効率的なモデリングができることを述べた。すなわち、このような場合、「対数死亡率」そのものではなく、「対数死亡率の逆関数」の時間変化のモデリングが有効であるということになる。

また、これをより一般化すると、ある時刻におけるある年齢の対数死亡率が、年齢も対数死亡率も異なる新たな方向へと変化していくという状況を考えることも可能である。そこで、次に、このような死亡率曲線の自由な方向への変化を数理モデルによって表現するためのフレームワークについて整理し、さらに、これに対応した死亡率モデルの表現について考察することとする。

3. 対数死亡率曲面、対数死亡率とその逆関数

死亡率曲線の自由な方向への変化を表現する数理モデルの構築のためには、対数死亡率曲面を用いた死亡率モデリングのフレームワークが必要となる。以下、これに関して必要な概念を定義する。

$X = [0, +\infty)$ を年齢、 $T = (-\infty, +\infty)$ を時間を表す変数とする。以下の死亡モデリングの議論においては、年齢 $x \in Y$ 、時刻 $t \in T$ における死力関数 $\mu_{x,t}$ を用いる。また、

$$y = \lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t}$$

で死力の対数を表す。ここで、 $y \in Y = (-\infty, +\infty)$ は対数死力関数の値を表す。このとき、 S を、

$$S = \{(x, t, y) \mid y = \lambda_{x,t}\}$$

とすると、これにより、 \mathbb{R}^3 における曲面が定義される。これを、対数死亡率曲面 (the log mortality surface) と呼ぶ。これは、対数死亡率曲面の一般的な表示方法である。この表示方法において、 $y = \lambda_{x,t}$ は、 \mathbb{R}^3 の中で、X-T 平面からの高さで捉えることができる。

以下、 $\lambda_{x,t}$ は、 $X_0 \times T_0 = [0, \omega] \times [t_0, t_1] \subset X \times T$ 上で定義された、 x と t に関する連続で滑らかな関数であると仮定する。ただし、 $\omega < +\infty$ は死亡率モデルを考える上のある有限な年齢の最大値とする。

成人死亡率のモデリングにあたっては、さらに、 $\lambda_{x,t}$ は各 t について、 $x > x_0(t)$ の範囲で x について狭義単調増加であると仮定してよい。ここで、 $x_0(t)$ は各 t について、 $\lambda_{x,y}$ が狭義単調増加関数となる x の下限値を示す。このとき、各 t に対して、関数 $\lambda_t(x)$

$$\lambda_t: \tilde{X}_t \rightarrow Y, \quad \lambda_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{x,t}$$

は x について単射である。ただし、 $\tilde{X}_t = [x_0(t), \omega]$ である。 $\tilde{Y}_t = \lambda_t(\tilde{X}_t)$ とすると、関数 $\lambda_t(x): \tilde{X}_t \rightarrow \tilde{Y}_t$ は各 t について、 \tilde{Y}_t 上で定義される逆関数 $\nu_t(y): \tilde{Y}_t \rightarrow \tilde{X}_t$ を持つ。

そこで、 Y_0 を以下のように定義する¹⁾。

$$Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} [y_0, y_1] \quad \text{ただし} \quad y_0 = \sup_{t \in T_0} \min \tilde{Y}_t, \quad y_1 = \inf_{t \in T_0} \max \tilde{Y}_t,$$

このとき、 $\nu_{y,t}: Y_0 \times T_0 \rightarrow X_0$ を

$$\nu_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_t(y)$$

により定義する。 $\nu_{y,t}$ は、時刻 t における対数死力関数の値が y となるような年齢 x を示している。

通常の死亡モデルは $\lambda_{x,t}$ をモデリングするわけであるが、死亡率曲線のシフティングをモデリングする場合には対数死亡率の逆関数である $\nu_{y,t}$ のモデリングが有効となる。これらをモデリングした場合、対数死亡率やその逆関数が直接表現されることから、本研究ではこれを死亡モデルの「通常型表示」と呼ぶこととする。

一方、死亡率曲線の時間的変化はこれらの時間微分によって表現される。そこで、(1) $\rho_{x,t}$: 死力改善率と (2) $\tau_{y,t}$: 年齢増加率を、以下の式によって定義し、これらをモデリングした場合には、これを死亡モデルの「微分型表示」と呼ぶこととする。

$$\rho_{x,t} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \lambda_{x,t}}{\partial t} = -\frac{\partial \log \mu_{x,t}}{\partial t}$$

$$\tau_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \nu_{y,t}}{\partial t}$$

1) $x_0(t)$ は必ずしも連続とは限らないため、 $\{\min_{t \in T_0} \tilde{Y}_t\}$ には最大値がない可能性もある。

4. 対数死亡曲面上の接ベクトル場を利用したモデル構築

LCモデルのような低下型モデルは、年齢を固定した場合の対数死亡率の時間的変化を記述することによって死亡率の変化を表現する。一方、シフト型モデルは、対数死亡率値を固定した場合の年齢の時間的変化を記述するモデルと考えることができる。以下、これらに対数死亡率曲面 S 上の接ベクトルを用いて表現する方法について述べる。

対数死亡率曲面 S 上で、年齢 x_0 を固定して移動した時に描かれる曲線 C_{x_0} と、対数死亡率値 y_0 を固定して移動したときに描かれる曲線 C_{y_0} を考える。このとき、 C_{x_0} と C_{y_0} はそれぞれ、

$$\begin{aligned} &(x_0, t, \lambda_{x_0, t}) \\ &(\nu_{y_0, t}, t, y_0) \end{aligned}$$

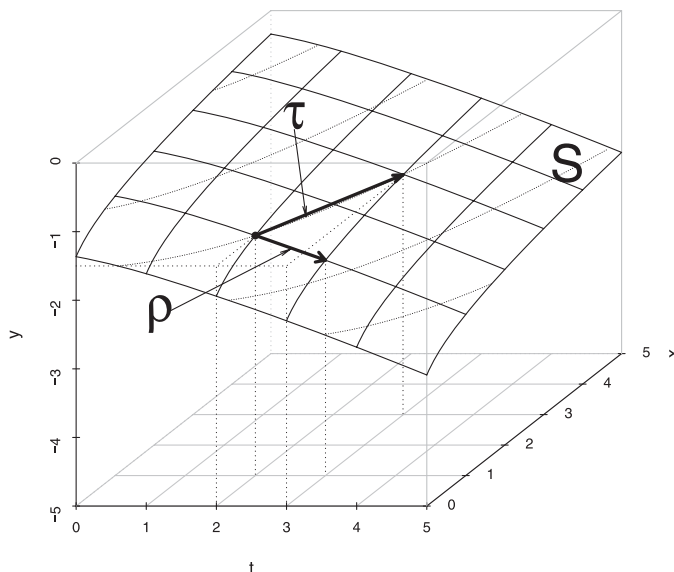
とパラメータ表示されるから、これを t で微分して得られる以下の2つのベクトル

$$\begin{aligned} \rho(x_0, t_0, y_0) &= (0, 1, -\rho_{x_0, t_0}) \\ \tau(x_0, t_0, y_0) &= (\tau_{y_0, t_0}, 1, 0) \end{aligned}$$

は、 S の接ベクトルとなる。

図1は、対数死亡率曲面 S 及びそれ上の接ベクトルの例を模式的に示したものである。対数死亡率曲面上の点 $(x, t, y) = (1, 2, -1.5)$ において、年齢を固定した方向への接ベクトルが ρ 、対数死亡率値を固定した方向への接ベクトルが τ である。

図1 対数死亡率曲面と接ベクトルの例



このような接ベクトルは、 S の任意の点で考えることができるから、各点にこの接ベクトルを対応させることにより、 S 上に 2 種類の滑らかな接ベクトル場を定義することができる。このように、対数死亡率の時間変化は接ベクトル場に対応させることができるが、逆に、各時刻・各年齢における死亡率の改善方向をベクトルで指定することによって、これを接ベクトル場として持つような対数死亡率曲面を構成することができる。したがって、各時刻・各年齢における死亡率改善方向をモデル化するという、接ベクトル場を利用した死亡モデルの新たな表現が得られる。

例えば、

$$\rho(x_0, t_0, y_0) = (0, 1, k'_t b_x)$$

とすれば、これが LC モデルを表現する接ベクトル場ということになる。

この死亡モデルの新たな表現を用いて、各時刻・各年齢における改善方向をわが国の死亡状況に適合するようにモデリングできれば、効率よくモデルを構築できることになる。本研究では、このようなアプローチに従って、死亡率の新たなモデリングを考える。

5. シフト型モデルとしての線形差分 (LD) モデル

年齢シフトモデルがわが国の死亡動向によく適合するのは、日本の近年の高齢死亡率改善が、死亡率曲線の垂直方向への低下よりも、水平方向にシフトするという見方がより実態に合っているということが背景にあった。しかしながら、年齢シフトモデルは死亡率を年齢軸上で変換した上で LC モデルを適用するという形でシフティングを間接的に表現しており、死亡率を直接モデリングしているわけではない。そこで、本研究においては、対数死亡曲面上の接ベクトル場を利用したモデリングに応用しやすく、また、効率的に高齢死亡率を表現可能な「シフト」型モデルである線形差分 (LD) モデルを提案する。

まず、LD モデルが高齢死亡率を効率的に表現可能であるという理論的背景について述べる。先行研究のレビューで述べた通り、Thatcher et al. (1998) は先進諸国の高齢死亡の表現に関して、ロジスティックモデルが最もパフォーマンスが高く、特に Kannisto モデルが少ないパラメータで高齢死亡率を効率的に表現しているとの結果を得ていた。したがって、このモデルが時間変化する際に持つ特性を抽出し、死亡率改善方向に基づくモデリングのフレームワークで扱うようにすることができれば、接ベクトル場を利用しつつ、高齢死亡率を表現する上で好ましい性質を備えたモデルの構築が可能となることになる。

以下の命題は、Kannisto モデル、すなわち、2 パラメータロジスティックモデルの $\tau_{y,t}$: 年齢増加率が持つ特性であり、LD モデルの考え方の基礎となるものである。

命題 1. 2 パラメータロジスティックモデル

$$y = \lambda_{x,t} = \log \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1 + \alpha_t \exp(\beta_t x)} = \log \alpha_t + \beta_t x - \log(1 + \alpha_t \exp(\beta_t x))$$

において、 $\tau_{y,t}$ は各 t において x の線形関数である。すなわち、

$$\tau_{y,t} = f'_t + g'_t x$$

が成立する。

Proof.

$$e^y = \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1 + \alpha_t \exp(\beta_t x)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_t \exp(\beta_t x) = \frac{e^y}{1 - e^y}$$

y を固定したまま両辺を t で微分することにより、

$$\alpha'_t \exp(\beta_t x) + \alpha_t \exp(\beta_t x) \left(\beta'_t x + \beta_t \frac{\partial x}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\alpha'_t}{\alpha_t \beta_t} - \frac{\beta'_t}{\beta_t} x$$

□

したがって、 $\tau_{y,t}$ が x の線形関数となる場合、2パラメータロジスティックモデルの年齢増加率が持つのと同一性質を持つことになる。そこで、年齢増加率が実際にこの条件を満たすモデルとしてLDモデルを定義する。すなわち、LDモデルは、年齢増加率が以下のように表されるモデルである。

$$\tau_{y,t} = f'_t + g'_t x$$

これは微分型表示であり、両辺を t で積分することにより、以下の通常型表示を得る。

$$\nu_{y,t} = f_t + g_t x + a_y$$

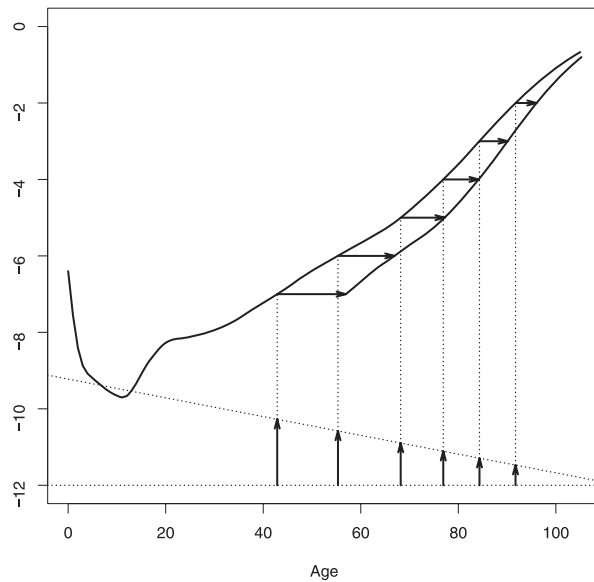
ここで、 a_y は対数死亡率の逆関数に関する標準的なパターンを表す。

図2は、LDモデルの考え方を模式的に表したものである。図は、左側にある対数死亡率曲線の成人死亡率部分が、死亡率改善により右側へシフトした状況を示している。ここで、水平方向右向きの矢印が各年齢におけるシフト量、すなわち、年齢増加率を表す。この矢印を反時計回りに90度回転させ、始点を揃えてグラフの下側に配置した。矢印の終点が一直線上に並んでいるが、これが年齢増加率が年齢の線形関数になることを意味している。LDモデルとは、この矢印の終点が常に直線上に並ぶモデルであるということができる。

ところで、LDモデルは、成人死亡率のみを表現するモデルであり、全年齢の死亡率を

図2 LDモデルの模式的例

Stylized Example of LD Model



必要とする将来生命表の作成に単独で用いることができない。一方、LCモデルは全年齢の死亡率をモデリングすることが可能である。そこで、若年層に対してはLCモデルの改善方向を持ちつつ、高齢層に対してはLDモデルの改善方向を持つようなベクトルを構成し、これを接ベクトル場として持つような対数死亡率曲面として全年齢死亡率モデルを構築することが考えられる。そこで、次に、このような方法を実際のおわが国の死亡率に適用し、将来生命表に応用することについて考察する。

III わが国の死亡率への適用

1. 実績値によるモデル評価・構築

最初に、LDモデルによる実績値にあてはめた場合のモデルのパフォーマンスについてLCモデルと比較しながら評価するとともに、両モデルの特性を活かして全年齢モデルを構築する方法を述べる。なお、本節では、標準パターンの基準となる年次を1970～2010年の全期間とし、女性の死亡率への適用結果を述べる。

LDモデルは、2パラメータロジスティックモデルの $\tau_{y,t}$ が x の線形関数であるという理論的背景に基づいて導入されたものであるが、これが実際のデータにもよく適合する点を確認しよう。図3と4は、 $\tau_{y,t}$ の実績値とLDモデル値を示したものである²⁾。これを見ると、実績値は年齢の線形関数として比較的よく近似できることが観察され、LDモデ

2) $\tau_{y,t}$ の算定にあたっては、統計的な安定性の観点から、当該年次の前後2年分の年齢増加分を4で割ることにより算出している。

図3 年齢増加率（実績値とLDモデル、1972～1990年）

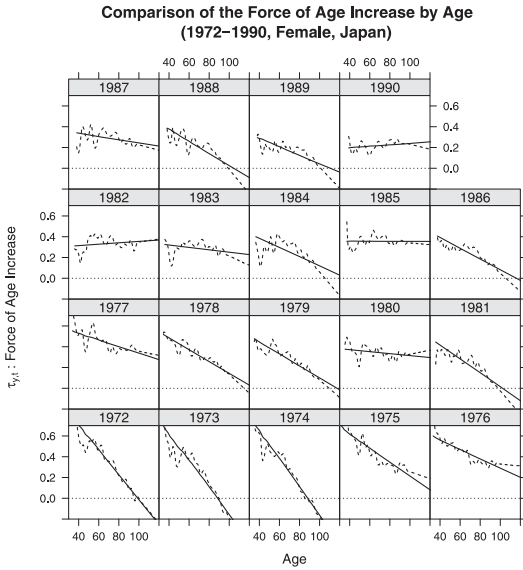
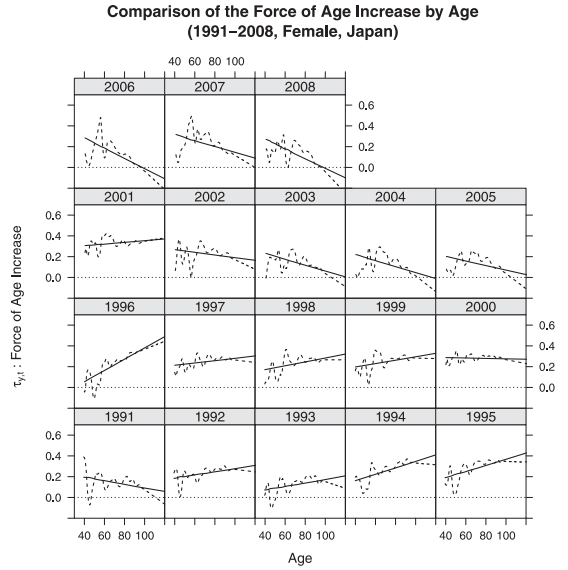


図4 年齢増加率（実績値とLDモデル、1991～2008年）



ルによる推計結果もこれによくあてはまっていることがわかる。

次に、LCモデルとLDモデルを高年齢死亡率にあてはめた場合の比較を行う。図5は1970～2010年の5年おきの実績とLCモデルによる対数死亡率を示したもので、図6は実績値とモデル値の差を示したものである。また、図7、8は同様にLDモデルについて示したものである。両者を比較すると、年齢が若いところではLCモデルのあてはまりがややよい一方、高年齢層ではLDモデルがよくあてはまっていることが観察できる。

図5 対数死亡率（実績値とLCモデル）

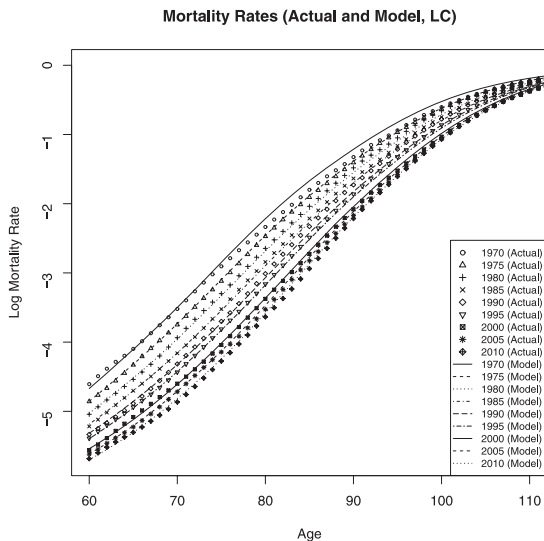
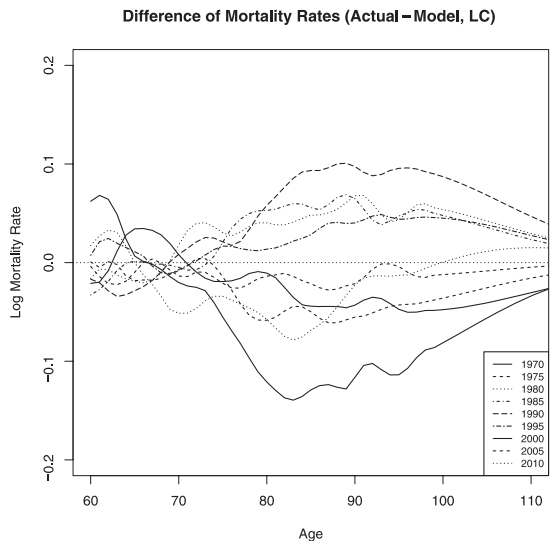


図6 対数死亡率の差（実績値-LCモデル）



さらに、このパフォーマンスの違いを統計的観点から比較するため、年齢各歳について、危険率 α を0.01%とした二項検定³⁾を行い、そのうちいくつかの年次で帰無仮説が棄却されるかという割合を示すことにより評価を行った。

図7 対数死亡率（実績値とLDモデル）

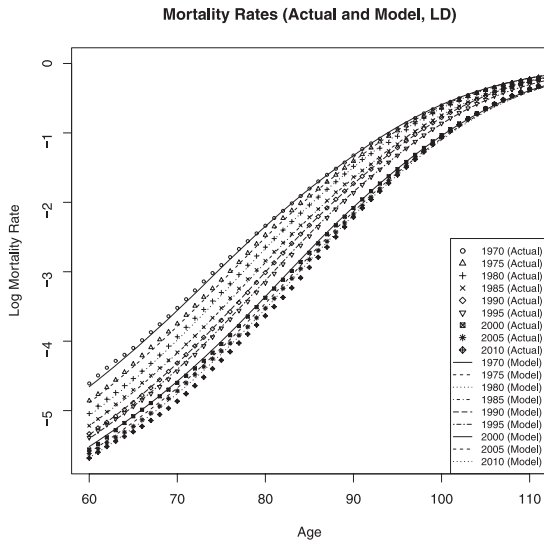


図8 対数死亡率の差（実績値-LDモデル）

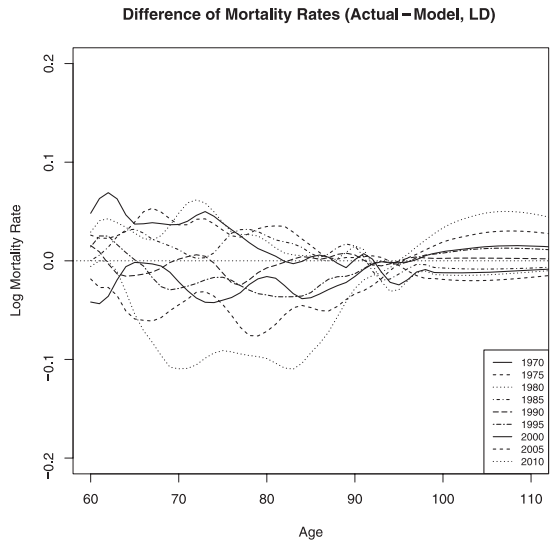
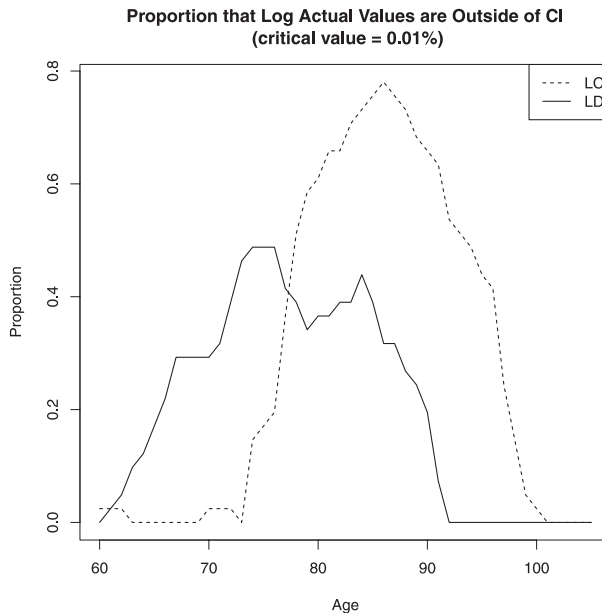


図9 対数死亡率の実績値が信頼区間の外側に出る割合（危険率=0.01%）

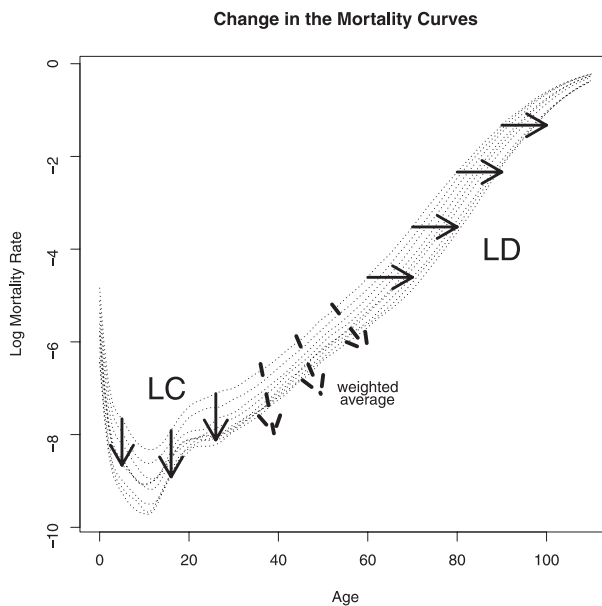


3) 死亡数は二項分布 $B(N_{x,t}, p_{x,t})$ ($N_{x,t}$, $p_{x,t}$ は、 x 歳、暦年 t における人口及び死亡率) に従うものとし、 $N_{x,t}$ は、死亡リスクに曝される生存延べ年数 $E_{x,t}$ に最も近い整数により近似した。

図9は、各年齢における割合を示したものであり、このグラフに示された値が低い部分ほど、モデルのパフォーマンスがよいことを示している。これによれば、低い年齢層ではLDモデルの方が割合が高い部分は若干あるものの、高齢層ではLDモデルのパフォーマンスがLCモデルを上回っており、わが国の高齢死亡率は低下型よりもシフト型の改善をしていることがわかるとともに、若年層ではLCモデル、高齢層ではLDモデルを用いることが望ましいことが示されたことになる。

次にこれら二つのモデルを用いて全年齢死亡率モデルを構成する方法を述べる。LC、LDモデルの推定結果を用いると、両モデルに対応する2つの接ベクトル場 ρ と τ が推定できる。これらは、模式的に表した図10のLC、LDと書かれた実線の矢印に対応している。

図10 LCモデルとLDモデルを用いた全年齢モデルの模式的例



ここで、図10において、LC、LDと書かれた実線の矢印の間にある中間的な年齢層に対しては、点線の矢印で表されるように、両者のベクトル場に属するベクトルを、一定のウェイトを用いて加重平均することにより、LCモデルからLDモデルへと連続的につながるようなベクトル場を定義することが可能である。ここでは、ウェイト $w(x, t)$ を線形関数を用いて以下の式で定義することとした。

$$w(x, t) = \begin{cases} 0 & (x < x_0(t) = 40) \\ \frac{x - x_0(t)}{x_1(t) - x_0(t)} & (x_0(t) \leq x < x_1(t)) \\ 1 & (x \geq x_1(t)) \end{cases}$$

ただし、 $x_1(t)$ は、基準年次の中央において $x_1(t_{bp}) = 70$ とし、その他の年については、

$\lambda_{x,t} = \lambda_{70,t_{bp}}$ を満たす x を $x_1(t)$ とした.

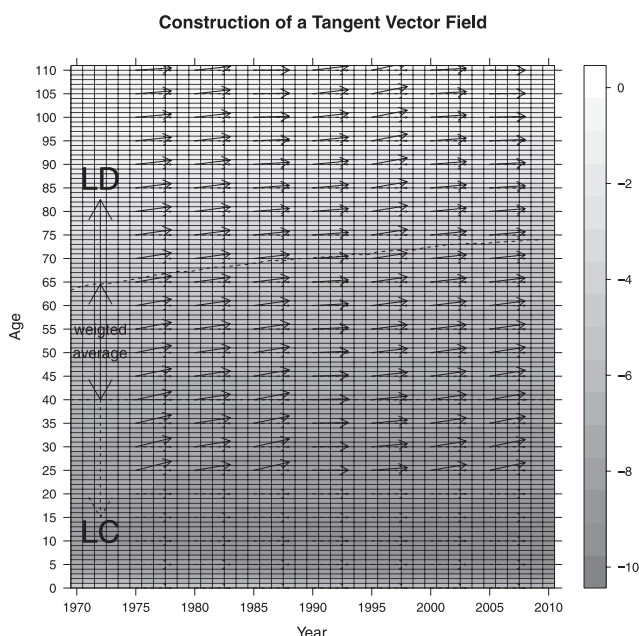
x_1 の設定については, 図6において70歳付近から実績値との乖離が拡大していること, また, 図9においてもLCは70歳を過ぎたところから割合が上昇を始めることに基づき70とした. 一方, x_0 については, 対数死亡率関数の逆関数が, 基礎となる全年次で定義できる年齢範囲を考慮して設定した. JMDによる1970年の男性の m_x が単調増加するのは25歳以降の範囲であり, これより低い年齢を含めると逆関数が定義できないが, 1970年の $m_{25} = 0.00139$ の水準に対応する2010年の死亡率は $m_{40} = 0.00138$ となっており, 基礎となる全年次でデータに基づいて逆関数を定義できる年齢は40歳以上となる. そこで, x_0 は40と設定した.

そして, このウエイトを用いた線形結合,

$$(1-w(x,t))\rho(x,t,y) + w(x,t)\tau(x,t,y)$$

が各点における死亡率改善を示すベクトルとなる接ベクトル場を持つような対数死亡率曲面を構成することにより, 全年齢死亡モデル(以下, TVFモデルと呼ぶ)を定義することができる. これをレキシス平面に射影したものが図11である.

図11 接ベクトル場を用いた全年齢死亡モデルの構成



2. TVFモデルを用いた将来推計

次に, TVFモデルの生命表の将来推計への応用例として, 国立社会保障・人口問題研究所「日本の将来推計人口(平成24年1月推計)」(国立社会保障・人口問題研究所 2012)

における死亡率の将来推計について述べることにする。なお、将来推計を行う際には、実績値と将来推計値の連続性の観点から、標準パターンの基準となる年次が推計開始時点に近い方が好ましいことから、基準年次は2006～2010年としている。

生命表を将来推計するためには、モデル内部で用いられているパラメータの趨勢を将来に投影し、これを用いて対数死亡率を推計することになる。以下では、平成24年推計で用いられた推計方法について述べることにする。

図12 LCモデルのパラメータ (a_x, b_x)

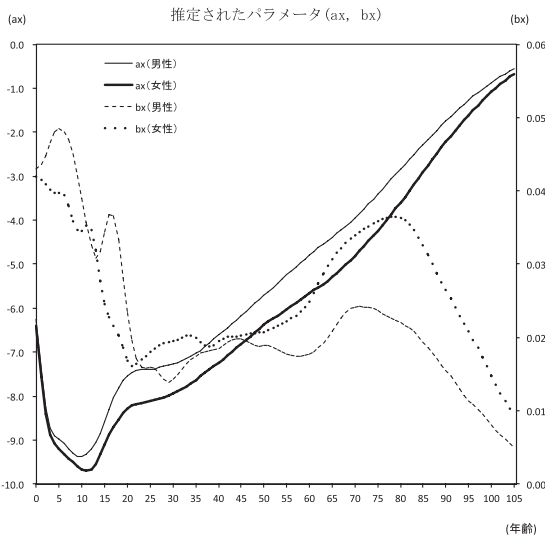
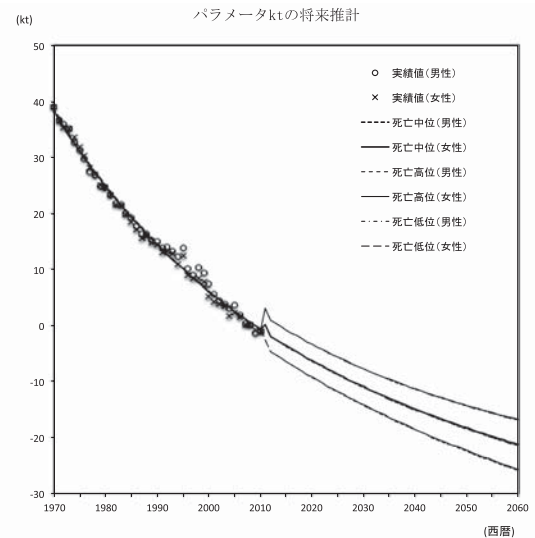


図13 LCモデルのパラメータ (k_t)



まず、LCモデルに含まれるパラメータについて述べる。LCモデルでは、 a_x 、 b_x 、 k_t という3種類のパラメータが推定されている。図12はこのうち、 a_x 、 b_x の推定結果を示したものである。LCモデルの将来推計にあたっては、通常、この2つのパラメータは将来に向けて固定される。一方、 k_t は死亡指数と呼ばれ、死亡の時系列水準を表すパラメータとなることから、この趨勢を将来に向けて投影することにより生命表の投影が行われる。図13はこれを示したものである。死亡指数 k_t の将来推計にあたっては、近年、徐々に緩やかになっている死亡水準の変化を反映させるために、関数あてはめを行って補外することにより推計を行った。推計のための関数としては、小松（2002）及び石井（2008）において用いられている関数（指数関数と対数関数の平均⁴⁾）がわが国の死亡指数の推移をよく表現しているとの観察に基づき同じ関数を用いた。

また、近年、多くの先進諸国で男女の平均寿命の格差が縮小する傾向が観察されるが、わが国では長らく男女差は拡大基調を続けてきた。ところが、2000年代に入ってからわが国においても男女差の拡大が停滞を見せるようになった。このような状況で、男女の死亡指数をそれぞれ独立に投影すると、将来推計値における男女格差の拡大が継続することと

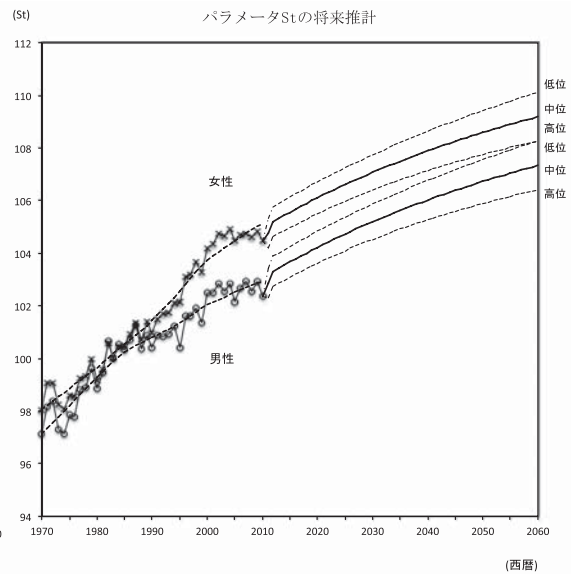
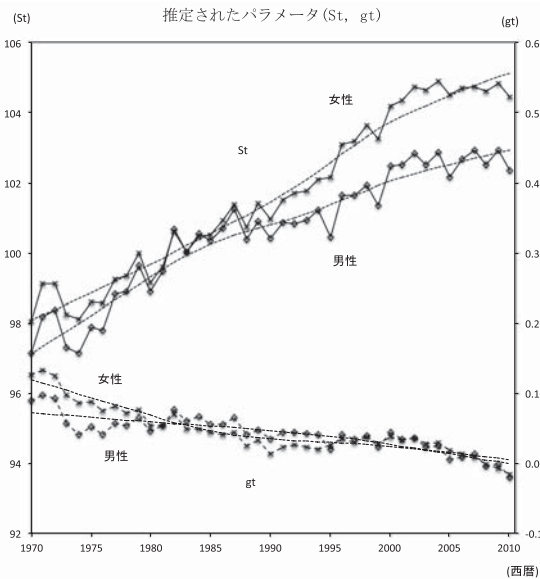
4) 指数関数は $k_t = \alpha_1 \exp(\alpha_2 t) + \alpha_3$ 、対数関数は $k_t = \beta_1 \ln(t + \beta_2) + \beta_3$ としてあてはめた。ここで、 α_n 、 β_n は定数である。

なることから、石井（2008）では、男女の死亡率改善をより整合的に推計するため、男女の死亡指数を組み合わせた行列に特異値分解を行い、第一特異値に対応する項の時系列変化に対して関数あてはめを行った後、男女別の死亡指数を推計している。この方法による死亡率推計値は、その後のわが国の平均寿命の実績値の動向とよく適合することが確認されており、ここでも同じ方法を用いて死亡指数の推計を行っている。

また、今後の死亡率推移ならびに到達水準については不確実性が高いものと考えられることから、平成24年推計では死亡指数の将来の動向に複数の仮定を与えることにより、将来の死亡水準に一定の幅を示している。具体的には、標準となる死亡率推移の死亡指数パラメータ（死亡中位と表す）の分散をブートストラップ法と残差分散により求め、これを用いて死亡指数が一定の確率（99%）で存在する区間を推定し、その上限及び下限を推移する場合を高位仮定・低位仮定として追加して3通りの死亡水準を示すものである。

図14 LDモデルのパラメータ (S_t, g_t)

図15 パラメータ S_t の将来推計



次に、LDモデルに含まれるパラメータの投影について述べる。LDモデルは通常型表示では、 $\nu_{y,t} = f_t + g_t x + a_y$ と表され、実績値へのあてはめにおいては最小二乗法により f_t と g_t を直接推定できる。後述する通り g_t については直近の値を将来的に向けて固定することによって投影が可能であるが、 f_t は年齢増加率の切片 f'_t を積分して得られるものであり、 f'_t が g'_t の変動の影響を受けることから、このパラメータ自体を直接将来に向けて投影することは難しい。そこで、死亡率曲線全体の大局的な位置を表す新たなパラメータ S_t を、2パラメータロジスティック曲線の変曲点に相当する年齢（死亡率の値が0.5となる点）により定義し、 S_t を投影することとした。そして、 S_t が将来推計されれば、

$$f_t = (1 - g_t) S_{t_1} - S_{t_0}$$

により f_t を求めることができる。ただし、 t_0 は基準年次の中央であり、 $f(t_0) = g(t_0) = 0$ と仮定している。

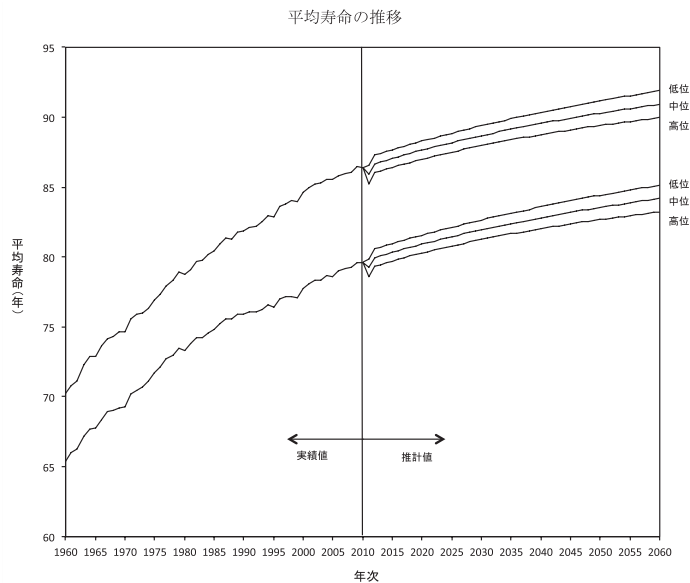
S_t と g_t の実績値の推移を示したものが、図14である。 S_t については1970年以降増加を続けているが、この15年間については死亡指数の推移と同様、ややその速度が緩やかになっている。そこで、 S_t については過去15年間の死亡指数に対する変化率を用いて線形補外することにより将来推計を行った。一方、 g_t は1970～1990年頃までは明確な減少基調にあったが、1990年以降については緩やかに増加した後、近年ではやや減少しながら推移している。しかしながら、1990年以前に比べるとその増減の動向が必ずしも一定方向に明確なものとなっているとは見られないことから、 g_t については直近の平均値（過去5年分）を将来に向けて固定することとした。 S_t の将来推計を示したものが図15である。死亡指数 k_t について3通りの推計値があることに対応し、 S_t についても3通りの推計値が示されている。

3. 将来推計結果とその評価

平成24年推計では、以上に述べた方法により求められたパラメータと変数から平成72（2060）年までの死亡率を男女別各歳別で算出し、将来生命表を推計した⁵⁾。

平均寿命の将来推計結果を示したものが図16である。中位仮定に基づくと、平成22（2010）年に男性79.64年、女性86.39年であった平均寿命は、平成32（2020）年に男性80.93

図16 平均寿命の推移



5) 平成23（2011）年については、東日本大震災が発生したことから、人口動態統計の死亡数、及び警察庁、岩手・宮城・福島県警察による被害状況データを用い、震災の影響を織り込んだ生命表を別途算定したものをを用いている。

年，女性87.65年，平成42（2030）年に男性81.95年，女性88.68年となり，平成72（2060）年には男性84.19年，女性90.93年まで到達するものと見込まれる。なお，死亡高位では平成72（2060）年には男性83.22年，女性89.96年，死亡低位では平成72（2060）年には男性85.14年，女性91.90年となるものと見込まれる。

次に，TVF モデルによって得られた死亡率の年齢パターンの特徴を，石井（2008）において用いられたのと同様の方法を用い，LC モデルと比較しながら評価する。図17は，

図17 対数死亡率の相対的水準（実績値）

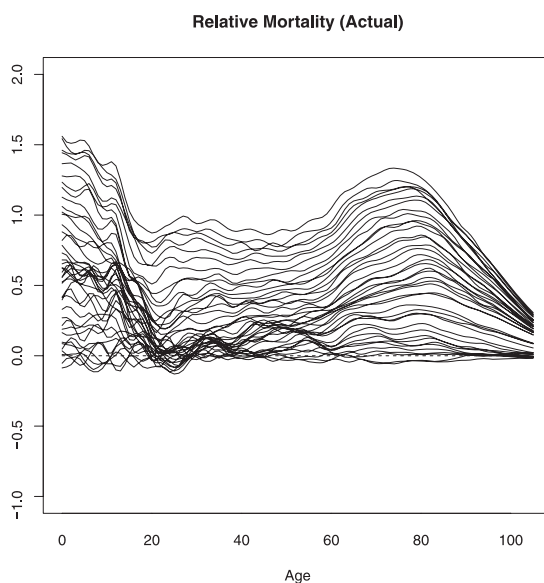


図18 対数死亡率の相対的水準（LC モデル）

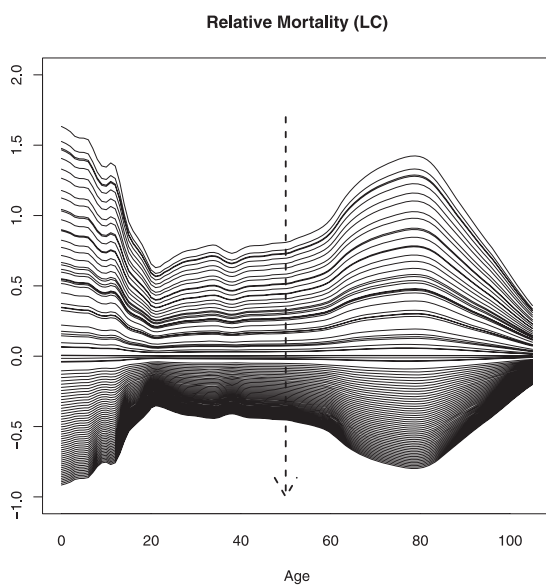
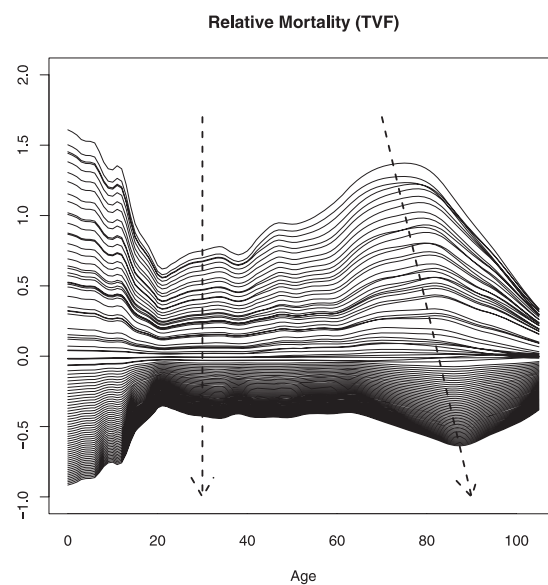


図19 対数死亡率の相対的水準（TVF モデル）



1970～2010年の対数死亡率（女性）の基準年次に対する相対的水準をグラフに表したものである。死亡率は年次推移に従って改善することから、相対的水準のグラフも上から下の方向に推移してくることとなる。ただし、高齢部分をよく観察すると、単に垂直的な改善だけではなく、改善の大きい部分が次第に高齢の方向にシフトしてきていることがわかる。

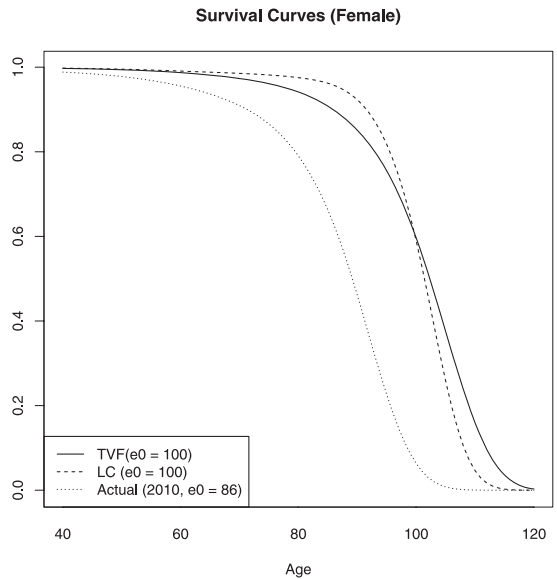
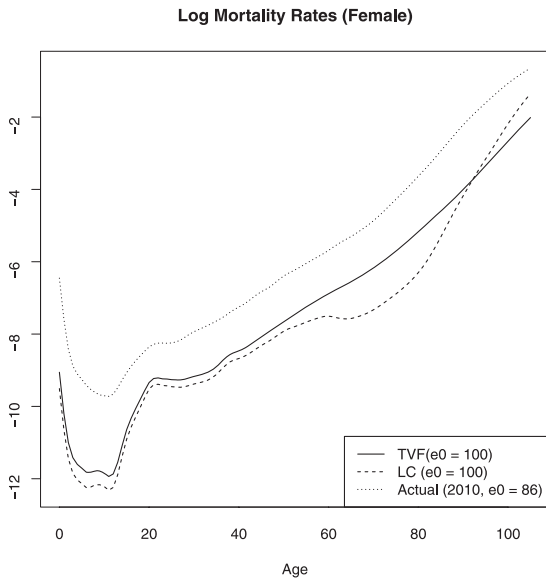
一方、LCモデル及びTVFモデルの対数死亡率の相対的水準を示したものが図18、19である。LCモデルは低下型モデルであり、死亡率改善を垂直的に表現することから、図18においても、実績値で観察されたような、改善の大きい部分のシフトは見られず、下半分の将来投影値についても同様の傾向が観察される。

一方、図19のTVFモデルによる相対的水準では、高齢部分がLDモデルを用いてモデル化されていることから、実績値で観察されたシフトが表現されているとともに、将来投影値についても同様の傾向が観察される結果となっている。

次に、死亡率改善が非常に進んだ仮想的な状況において、両モデルの生命表関数がどのような様相を示すのか比較する。図20は、LCモデルとTVFモデルのパラメータである k_t 及び S_t を探索的に変化させ、その他のパラメータについては変化しないものと仮定して e_0 が概ね100年前後となる場合を機械的に求めて、どのような対数死亡率曲線となるかについての仮想的な試算を行ったものである⁶⁾。点線は2010年の実績値であり、これに対して、LCモデルを破線、TVFモデルを実線で示している。 e_0 が100年前後となった場合、LCモデルによる対数死亡率曲線は、60歳前後で一旦たるんだ後、80歳以降で逆に急激に上昇するような不自然な年齢パターンを示している。これは、LCモデルでは年齢別死亡

図20 対数死亡率曲線の比較

図21 生存数曲線の比較



6) k_t 等を将来投影した関数を用い、これらに対応する年次を機械的に求めると、LCモデルでは3170年前後、TVFモデルでは2670年前後となる。

率の改善を表す b_x が固定されており、 b_x は図12にある通り高齢部でピークを持つ山形の形状をしていることから、このパターンに従って死亡率改善が継続すると仮定すると、山形のピーク部分に対応する年齢層のみが著しく死亡率改善し、このような不自然なパターンが導き出されるのである。一方、実線で示した TVF モデルによる対数死亡率曲線にはこのような不自然な年齢パターンは見られない。このように、TVF モデルを用いて、高齢死亡率を LD モデルでモデル化することによって、自然な年齢パターンを持つ対数死亡率曲線の投影を行うことが可能である。

同様に生存数曲線を試算したものが図21である。これによれば、破線で示された LC モデルによる生存数曲線は、2010年の生存数曲線と比較した場合、生存数曲線の右上のカーブが張り出して矩形化が進んでいることがわかる。一方、TVF モデルによる生存数曲線は全体が右側にシフトするような形で死亡率改善が進んでおり、わが国の近年の死亡率改善が、死亡の遅延と見られる動きと整合的な結果となっていることがわかる。

おわりに

本研究では、わが国の死亡動向に適した柔軟性の高い数理モデルを開発する観点から、死亡率曲線の自由な方向への変化を表現する数理モデルを提案するとともに、わが国の将来生命表への応用について研究を行った。

リレーショナルモデルによる死亡の年齢・時系列パターンモデリングは、「対数死亡率の時間変化のモデリング」を行うことに相当する。そして、このような対数死亡率の時間的変化をより一般化し、ある時刻におけるある年齢の対数死亡率が、年齢も対数死亡率も異なる新たな方向へと変化していくという考え方が可能である。そこで、本研究ではこのような死亡率曲線の自由な方向への変化を数理モデルによって表現するためのフレームワークとして、対数死亡率曲面上の接ベクトル場の利用が有効であることを示すとともに、さらにこのようなモデリングに応用しやすく、効率的に高齢死亡率を表現可能な「シフト」型モデルである線形差分 (LD) モデルを提案した。

そして、この方法論を利用し、わが国の死亡率にあてはめることにより、モデルの評価を行った。実績値に LC, LD の両モデルをあてはめたところ、年齢が若いところでは LC モデルのあてはまりがややよい一方、高年齢層では LD モデルがよくあてはまっている点を確認できた。また、このパフォーマンスの違いについて統計的観点からの比較を行い、低い年齢層では LC モデルのパフォーマンスがやや上回る部分があるものの、高年齢層では LD モデルが LC モデルを上回っており、わが国の高齢死亡率は低下型よりもシフト型の改善をしていることが確認されたとともに、若年層では LC モデル、高年齢層では LD モデルを用いることの有効性が示された。このような観察に基づき、両者のベクトル場に属するベクトルを一定のウェイトを用いて加重平均することにより LC モデルから LD モデルへと連続的につながるようなベクトル場を定義し、全年齢死亡モデルである TVF モデルを提案した。

次に、TVFモデルの生命表の将来推計への応用例として、平成24年推計における死亡率の将来推計法やその評価について述べた。TVFモデルによる対数死亡率の相対的水準の観察からは、LCモデルでは表現できなかった、死亡率改善が大きい部分が高齢側へシフトする動きが表現されているとともに、将来投影値についても同様の傾向が反映されるものとなっている。また、死亡率改善が非常に進んだ仮想的な状況を考察し、TVFモデルではLCモデルで現れたような対数死亡率曲線の不自然な年齢パターンは生じず、生存数曲線もわが国の近年の死亡動向と整合的なものとなっていた。このように、TVFモデルによる将来推計は、LCモデルによるものと比較して、様々な有効性があることが明らかとなった。

本研究で提案したLDモデルは、年齢増加率 $\tau_{y,t}$ を年齢の線形関数として捉えるモデルであり、少ないパラメータで効率的に年齢増加率を表現できるという利点があったが、残差分析などに基づくモデル改良により、さらなるモデルの精度向上を行うことのできる余地は残されていよう。また、Ewbank et al. (1983)はブラスのロジットシステムの拡張として、 l_x をロジット変換を含んだより一般的な関数で変換し、若年層や高齢層での死亡パターンを改善する試みを行っているが、このような生命表関数に対する変換も今後のモデル改善に関する視点として考えることができる。

また、本研究では主として死亡率の将来推計に応用する観点から対数死亡率の逆関数やその時間変化の概念を導入したが、これらは高齢死亡の動向に関しても様々な情報をもたらすものと考えられ、例えば、年齢増加率 $\tau_{y,t}$ の動向を死亡率曲線のシフティング特性の評価に応用する可能性などが考えられる。このような、本研究で提案したモデルや概念のさらなる発展・応用については今後の課題としたい。

(2013年7月27日査読終了)

参考文献

- Beard, R. E. (1971) "Some aspects of theories of mortality, cause of death analysis, forecasting and stochastic processes", in W. Brass ed. *Biological Aspects of Demography*, London: Taylor & Francis Ltd, pp. 57-68.
- Bongaarts, J. (2005) "Long-range Trends in Adult Mortality: Models and Projection Methods", *Demography*, Vol. 42, No. 1, pp. 23-49.
- Brass, W. (1971) "On the Scale of Mortality", in W. Brass ed. *Biological Aspects of Demography*, London: Taylor and Francis Ltd, pp. 69-110.
- Coale, A. J. and P. Demeny (1983) *Regional Model Life Tables and Stable Populations, 2nd Edition*, New York: Academic Press.
- De Jong, P. and L. Tickle (2006) "Extending Lee-Carter mortality forecasting", *Mathematical Population Studies*, Vol. 13, No. 1, pp. 1-18.
- Ewbank, D., J. Gomez de Leon, and M. Stoto (1983) "A Reducible Four-Parameter System of Model Life Tables", *Population Studies*, Vol. 37, No. 1, pp. 105-127.
- Gage, T. B. and C. J. Mode (1993) "Some laws of mortality: how well do they fit?", *Human biology*, Vol. 65, No. 3, pp. 445-461.

- Gompertz, B. (1825) "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 115, pp. 513-583.
- Heligman, L. and J. H. Pollard (1980) "The age pattern of mortality", *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 107, pp. 49-80.
- Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA) and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at www.mortality.org or www.humanmortality.de.
- 井川孝之 (2012) 「Lee-Carter モデルの残差構造のモデリングと死亡率予測」, 日本保険・年金リスク学会第10回大会, 東京大学.
- 石井太 (2008) 「近年のわが国の死亡動向に適合した将来生命表推計モデルの研究—年齢シフトモデルの開発—」, 『人口問題研究』, 第64巻, 第3号, pp. 28-44.
- 小暮厚之, 長谷川知弘 (2005) 「将来生命表と統計モデリング: Lee-Carter 法とその拡張—ヒューマンセキュリティへの基盤研究—」, 『総合政策学ワーキングペーパー』, 第71号.
- 国立社会保障・人口問題研究所 (2012) 『日本の将来推計人口—平成24年1月推計—』, 一般財団法人厚生労働統計協会.
- 小松隆一 (2002) 「リレーショナル・モデルによる日本の将来生命表作成の試み」, 『人口問題研究』, 第58巻, 第3号, pp. 3-14, 9月.
- Lee, R. and L. Carter (1992) "Modeling and Forecasting U.S. Mortality", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No. 419, pp. 659-675.
- Li, N. and R. Lee (2005) "Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee-Carter method", *Demography*, Vol. 42, No. 3, pp. 575-594.
- Makeham, W. M. (1860) "On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables", *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 8, No. 6, pp. 301-310.
- Mode, C. J. and R. C. Busby (1982) 「An eight-parameter model of human mortality—The single decrement case」, *Bulletin of Mathematical Biology*, 第44巻, 第5号, pp. 647-659.
- Mode, C. J. and M. E. Jacobson (1984) "A parametric algorithm for computing model period and cohort human survival functions", *International journal of bio-medical computing*, Vol. 15, No. 5, pp. 341-356.
- 南條善治, 吉永一彦 (2003) 「日本の生命表の将来推計の試み—Lee-Carter 法に関連して—」『日本人口学会第55回大会報告要旨集』, pp.57.
- 小川直宏, 近藤誠, 田村正雄, 松倉力也, 斎藤智子, A. Mason, S. Tuljapurkar, N. Li (2002) 『人口・経済・社会保障モデルによる長期展望—人的資本に基づくアプローチ—』, 日本大学人口研究所.
- 及川桂 (2006) 「将来死亡率推定に関する一考察」, 『(社) 日本アクチュアリー会会報』, 第59巻, 第2号, pp.1-28.
- Ozeki, M. (2005) "Application of Mortality Models to Japan", Presented at The Living to 100 and Beyond Symposium.
- Perks, W. (1932) "On some experiments on the graduation of mortality statistics", *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 63, pp. 12-40.
- Siler, W. (1979) "A Competing-Risk Model for Animal Mortality", *Ecology*, Vol. 60, No. 4, pp. 750-757.
- Thatcher, A. R., V. Kannisto, and J. W. Vaupel (1998) *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*: Odense University Press.
- Tuljapurkar, S., N. Li, and C. Boe (2000) "A Universal Pattern of Mortality Decline in the G7 Countries", *Nature*, Vol. 405, pp. 789-782.
- United Nations (2006) *World Population Prospects: The 2004 Revision, Volume III: Analytical Report*: Department of Economic and Social Affairs, Population Division.
- Wilmoth, J. R. (1996) "Mortality Projections for Japan", in G. Caselli and A. D. Lopez eds. *Health and Mortality among Elderly Populations*: Oxford Univ. Press, pp. 266-287.

Developing Mathematical Models That Admit Unconstrained Moving of Mortality Curves and Their Application to Projections for Japan

Futoshi ISHII

This study aims to propose mathematical models that admit unconstrained moving of mortality curves and their application to projections for Japan in terms of developing new mortality models that are suitable for Japanese mortality trends.

In this study, we showed that the application of tangent vector fields on the log mortality surface is useful for a framework of expression for unconstrained moving of mortality curves. Then, we proposed a new shift-type model, the Linear Difference (LD) model, which is applicable for that type of modeling and able to express old age mortality effectively.

We applied this method to Japanese mortality and evaluated the models. Applying the actual rates to the Lee-Carter (LC) model and the LD model, we found that the LD model exhibits good fitting for old ages even though the LC model fits slightly better for younger ages. We also compared the performances for both models from the statistical viewpoint, and confirmed that the LD model is better than the LC model for old ages whereas the LC is better for younger ages. From the observations, we concluded that the recent mortality improvement in Japan could be better expressed as shifting than declining, and found that it would be effective to use the LC model for younger ages and the LD model for old ages. Then, we defined a vector field that continuously connects between the LC model and the LD model with weighted averages of the vectors belonging to both models with some weights, and proposed the TVF model as a whole age model.

Finally, we described the method of the mortality model in the official population projection in 2012 and its evaluation as an application of the TVF model. We found that the TVF model succeeded in expressing the age shift with a large improvement and its reflection on projected mortality, which could not be achieved with the LC model. We also observed that the TVF model does not exhibit the unnatural mortality patterns that are found in the LC model when we assume an extremely high improvement in mortality, and that the favorable behaviors of the survivor function are compatible with recent trends in Japan. We found that the projections by the TVF model have many advantages compared with those by the LC model.