多次元安定人口理論の数学的基礎 I ：古典論

稲 葉 寿

I はじめに

シャープとロトカ（Sharpe and Lotka, 1911[1]）によって創始された安定人口理論（stable population theory）は，年齢構造をもつ均質な単性人口集団のダイナミクスに対する基本的洞察を与えるものとして現代的な数理人口学の出発点であると同時に，発展途上諸国の人口動態に対する適用をつうじて実用的にも長らく人口学者の主要なトゥールの一つであった[2]. その数学的基礎は，Feller（1941[3]）の古典的結果によって初めて与えられたが，最近では１－パラメータ半群による関数解析的なアプローチが開発され，再び注目されてきている[4]. 一方，近年においては年齢以外のパラメータによって構造化された人口のダイナミクスへの関心が高まり，いわゆる多次元人口学（multidimensional demography[5]）として急速に発展しつつある．その嚆矢となったのは Andrei Rogers, Herve

---

1) F. R. Sharpe and A. J. Lotka, "A problem in age-distribution", *Philosophical Magazine*, ser. 6, vol. 21, 1911, pp.435-438.

2) 安定人口理論とその応用については以下を参照：*The Concept of a Stable Population : Application to the Study of Populations of Countries with Incomplete Demographic Statistics*, New York, 1986, United Nations. A. J. Coale, *The Growth and Structure of Human Populations*, Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1972. F. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics*, Philadelphia, Pennsylvania : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975. J. Impagliazzo, *Deterministic Aspects of Mathematical Demography*, Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer-Verlag, 1985. N. Keyfitz, *Introduction to the Mathematics of Population with Revisions*, Reading : Addison-Wesley, 1977. N. Keyfitz, *Applied Mathematical Demography* (2nd Edition), New York Berlin Heidelberg Tokyo : Springer-Verlag, 1985. A. Lopez, *Problems in Stable Population Theory*, Princeton, New Jersey : Office of Population Research, Princeton University, 1961. J. H. Pollard, *Mathematical Models for the Growth of Human Populations*, Cambridge : Cambridge University Press, 1973.

3) W. Feller, "On the integral equation of renewal theory", *The Annals of Mathematical Statistics*, 12, 1941, pp.243-267.

4) 半群アプローチについては以下を参照：G. F. Webb, A semigroup proof of the Sharpe-Lotka theorem, In *Infinite-Dimensional Systems*, F. Kappel and W. Schappacher (eds), Lecture Notes in Mathematics 1076, 1984, pp. 254-268, Berlin Heidelberg New York Tokyo : Spring-Verlag. G. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, New York and Basel : Marcel Dekker, 1985. J. A. J. Metz and O. Diekmann (eds), *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, Lecture Notes in Biomathematics 68, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo : Springer-Verlag, 1986. H. Inaba, "A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process," to appear in *Mathematical Population Studies*, 1987.

5) K. C. Land and A. Rogers, *Multidimensional Mathematical Demography*, New York London : Academic Press, 1982.

Le Bras[6] 等による多地域人口モデルであろう．多地域安定人口モデルにおいては人口は年齢の他に，人口の居住地域をあらわす有限個の離散パラメータによって構造化される．Rogers（1975）はこのモデルにおいては，ロトカの安定人口理論と同様の帰結，すなわち，年齢別地域別の人口分布は時間とともに一つの安定な分布に収束する（強エルゴード定理）ことを主張した．このことは離散時間モデルに関してはすでに十分検討され，満足すべき結果が得られている（Cohen, 1982; Feeney, 1971; Le Bras, 1971；稲葉，1986[7]）．しかし連続時間モデルに関しては，Rogers（1975）において極めて不完全な取り扱いがなされて以来，厳密な定式化と証明が存在しなかった．本稿の目的はこのRogers モデルに代表される多次元連続時間線形人口モデルの強エルゴード定理を証明し，多次元安定人口理論にその基礎を与えることである．したがってモデルの実用的，経験的応用には触れない[8]．また，本稿ではもっぱら積分方程式による古典的アプローチを採用することとし，半群による定式については別稿に譲ることとしたい。

II　多次元安定人口モデル

いま$p_i(a,t)da$ は年齢区間（$a, a+da$）にあるi－状態（$i=1,2,\cdots n$）人口の人口数をあらわすとしよう．すなわち$p_i(a,t)$は年齢密度関数（age－density function）であり，分布関数

$$F_i(a)=\int_0^a p_i(u,t)\,du,$$

がa 歳以下のi－状態人口を与える。$p_i(a,t)$はaについて区間［$0,\infty$）上で可積分な正値関数である．ここで「状態」とは居住地域や社会的地位，生理学的特性などに対応し，全人口は有限個の部分人口へと状態別に分類されることになる．人口ベクトル$p(a,t)$を

$$p(a,t)=(p_1(a,t),\cdots,p_n(a,t))^{\tau}, \tag{2.1}$$

と定義する．ここでτは転置作用素である．$q_{ij}(a)$（$i\neq j$）をj－状態からi－状態への年齢a歳における瞬間的移動率とする．$\mu_i(a)$をi－状態人口の死亡力関数（force of mortality）とすれば，

$$q_{jj}(a)=-\mu_j(a)-\sum_{i\neq j}q_{ij}(a), \tag{2.2}$$

と定義し，$q_{ij}(a)$を第（i,j）要素とする$n\times n$ 行列を$Q(a)$とする．$Q(a)$ を状態間推移行列とよぶ．$m_{ij}(a)$は年齢aで，j－状態にある個体が単位時間あたりに生むi－状態の新生児数を与える出生率関数であるとする．$M(a)$は$m_{ij}(a)$を第（i,j）要素とする$n\times n$ 行列とし，出生率行列とよぶ．このと

6）H. Le Bras, "Équilibre et croissance de populations soumises à des migrations", *Teoretical Population Biology* 2, 1971, pp. 100-121. A. Rogers, *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, New York London Sydney Toronto : John Wiley & Sons, 1975.

7）J. Cohen, "Multiregional age-structured populations with changing rates : weak and stochastic ergodic theorems", In *Multidimensional Mathematical Demography*, 1982,（注5）pp.477-504. G. M. Feeney, Comment on a proposition of H. Le Bras, *Theoretical Population Biology* 2, 1971, pp.122-123. 稲葉寿,「多地域人口成長の離散時間モデルについて」,『人口問題研究』, 第179号, 1986年, pp.1-15.

8）多地域人口モデルについてはIIASA（International Institute for Applied Systems Analysis）から多数のリポートおよびコンピュータプログラムが公表され，その実用化が図られている．例えば以下を参照．F. Willekens and A. Rogers, *Spatial Population Analysis : Methods and Computer Programs*, RR-78-18, Laxenberg, Austria : IIASA, 1978. A. Rogers (ed), *Advances in Multiregional Demography*, RR-81-6, Laxenberg, Austria : IIASA, 1981.

き多次元の安定人口モデルは以下のようなLotka－Von Foerster システム[9]によって表される．

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t}\right)p\ (a\ ,t\ )=Q(a)\,p\ (a\ ,t\ ), \tag{2.3a}$$

$$p\ (0,t\ )=\int_0^\infty M(a)\,p\,(a\ ,\ t\ )\,da, \tag{2.3b}$$

$$p\ (a\ ,\ 0)=\phi(a), \tag{2.3c}$$

ここで $\phi(a)=(\phi_1(a),\ \cdots,\ \phi_n(a))^\tau$ は初期人口の人口ベクトルである．（2.3ａ）はベクトルタイプの Mckendrick－Von Foerster 方程式であり，人口の加齢と状態間推移の過程を表現している．

以下ではまず一次元の場合にならって境界値 $p(0,t)$（出生率）に関する再生方程式（renewal equation）を導こう．行列微分方程式

$$\frac{d}{da}\,L(a)=Q(a)\,L(a),\ L(0)=I,\qquad (I\ ：単位行列) \tag{2.4}$$

の解として生残率行列 $L(a)$を定義する．このとき Abel－Jacobi [10]の公式から逆行列 $L^{-1}(a)$が $0\leqq a<\infty$ に対して常に存在する．$L(a)$の第$(i\ ,\ j)$要素 $l_{ij}(a)$は，j－状態に出生した人口が a 歳で i－状態に生残している率を示している．推移行列 $L\ (b,\ a)$ を $L(b\ ,\ a)=L(b)\,L^{-1}(a)$ と定義する．このとき以下が成り立つ．

補題 2.1：(1)　$L\ (b\ ,\ a\ )\geq 0$，かつ推移性；$L(c\ ,\ a)=L\ (c\ ,\ b\ )\ L(b\ ,\ a\ )\ ,\ c\geqq b\geqq a$，が成り立つ．

(2)　$|L\ (b,\ a\ )\ |$[11] $\leqq \exp\left[-\underline{\mu}\,(b-a\ )\right]$，ここで，$\underline{\mu}=\inf_{a,i}\ \mu_i(a)$。

（証明）　明らかに $L\ (b\ ,\ a\ )$ は以下の微分方程式の解である．

$$\frac{d}{db}\,L\ (b\ ,\ a\ )=Q(b)\ L\ (b\ ,\ a\ )\ ,\ \ L\ (a\ ,\ a\ )=I\ .$$

ここで $\eta=\sup_{i,a}|\ q_{ii}(a)\ |$とすれば $Q\ (a)+\eta\, I$ は非負行列であり，

$$\frac{d}{db}\left[L\ (b\ ,\ a\ )\exp\{\eta\ (b-a)\}\right]=\left[Q(b)+\eta\, I\right]\ L\ (b\ ,\ a\ )\exp\ \{\eta\,(b-a)\ \}.$$

---

9) Lotka-Von Foerster システムの誘導については以下を参照．稲葉寿，「多次元人口成長の決定論的モデル」，『人口問題研究』，第172号，1984年，pp.39-62.

10) 山本稔，『常微分方程式の安定性』，実教出版，1979年，p. 69.

11) 以下ではベクトル $x=(x_1,\ \cdots\ x_n)^\tau\in C^n$ のノルムとしては $|\,x\,|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ を用いる．またこれに対応して，行列 $A=(a_{ij})_{1\leqq i,\ j\leqq n}\in B(C^n,\ C^n)$(ただし $B(C^n,\ C^n)$は n 次複素行列の集合を示す）のノルムは

$$|\,A\,|=\sup_{x\neq 0}\frac{|\,Ax\,|}{|\,x\,|}=\max_j\sum_{i=1}^{n}|\ a_{ij}\ |$$

となる．またベクトル値関数 $f(a)$ については，断りのないかぎり L^1－ノルム $\|f\|=\int_0^\infty|\ f(a)\ |\,da$ を用いる．

従って，以下の表現を得る。

$$L(b,a)\exp\{\eta(b-a)\}=I+\int_a^b\left[Q(\rho)+\eta I\right]d\rho$$

$$+\int_a^b\left[Q(\rho)+\eta I\right]\int_a^\rho\left[Q(\rho_1)+\eta I\right]d\rho_1\,d\rho+\cdots$$

この右辺は非負であるから$L(b,a)$も非負となる．$L(b,a)$の推移性は明らかであろう．
つぎに$l_{ij}(b,a)$を$L(b,a)$の第(i,j)要素とすれば，

$$\frac{d}{db}l_{ij}(b,a)=\sum_{k=1}^n q_{ik}(b)l_{kj}(b,a),\ l_{ij}(a,a)=\delta_{ij},$$

$$\frac{d}{db}\sum_{i=1}^n l_{ij}(b,a)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n q_{ik}(b)l_{kj}(b,a)=\sum_{k=1}^n(-\mu_k(b))\,l_{kj}(b,a)$$

$$\leqq(-\underline{\mu})\sum_{i=1}^n l_{ij}(b,a)。$$

したがって

$$\sum_{i=1}^n l_{ij}(b,a)\leqq\exp\left[-\underline{\mu}(b-a)\right].$$

これは(2)が成り立つことを示している．□

推移行列$L(b,a)$を用いることで（2.3a）は特性線$a-t=$const. に沿って容易に積分されて以下の表現を得る．

$$p(a,t)=\begin{cases}L(a)p(0,t-a),\ t-a>0,\\ L(a,a-t)\phi(a-t),\ a-t\geqq 0.\end{cases}\tag{2.5}$$

（2.5）を（2.3b）に投入すれば，

$$p(0,t)=\int_0^t M(a)L(a)p(0,t-a)da+\int_t^\infty M(a)L(a,a-t)\phi(a-t)da.\tag{2.6}$$

ここで，

$$B(t)=p(0,t),\ \Psi(a)=M(a)L(a),\ G(t)=\int_t^\infty M(a)L(a,a-t)\phi(a-t)da,$$

とおけば（2.6）は以下の形に書ける．

$$B(t)=G(t)+\int_0^t\Psi(a)B(t-a)da.\tag{2.7}$$

これはベクトル型のロトカの再生積分方程式（Lotka's renewal integral equation）に他ならない．（2.7）の解$B(t)$と初期条件$\phi(a)$によって（2.5）は，

$$p(a,\ t)=\begin{cases} L(a)B(t-a),\ t-a>0, \\ L(a,\ a-t)\phi(a-t),\ a-t\geqq 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

とかけるから，$B(t)$を決定し，その挙動をしらべることが課題となる．

Ⅲ　再生方程式の解の性質

ここでは再生方程式（2.7）の解の性質を検討しよう．$\Psi(a)$，$G(t)$ が有界であれば（2.7）が可積分解 $B(t)$を任意の時間区間［0，T］，$0\leqq T<\infty$，でもつことはよく知られている[12]．この解については以下の評価が成り立つ．

補題 3.1：$\bar{m}=\sup_a |M(a)|$ とする．このとき

$$|B(t)|\leqq \bar{m}\,\|\phi\|\exp[(\bar{m}-\underline{\mu})t]. \tag{3.1}$$

ただし，$\|\phi\|=\int_0^\infty |\phi(a)|\,da$ とする．

（証明）　補題 2.1から以下を得る．

$$|G(t)|\leqq\int_t^\infty |M(a)L(a,\ a-t)\phi(a-t)|\,da\leqq\bar{m}\int_t^\infty \exp(-\underline{\mu}t)|\phi(a-t)|da$$
$$\leqq\bar{m}\exp(-\underline{\mu}t)\,\|\phi\|.$$

（2.7）の絶対値をとれば以下を得る．

$$|B(t)|\exp(\underline{\mu}t)\leqq\bar{m}\,\|\phi\|+\bar{m}\int_0^t \exp(\underline{\mu}a)\,|B(a)|\,da.$$

Gronwallの不等式から評価（3.1）を得る．□

さて我々の関心は再生方程式の解において $t\to\infty$ とした場合の漸近的挙動を調べることである．そこでラプラス変換を用いる．関数 $f(a)$のラプラス変換 $\hat{f}(\lambda)$，$\lambda\in C$ は積分が収束する限りにおいて

$$\hat{f}(\lambda)=\int_0^\infty \exp(-\lambda a)f(a)\,da, \tag{3.2}$$

で定義される．評価（3.1）から（2.7）の解 $B(t)$のラプラス変換 $\hat{B}(\lambda)$ が $\mathrm{Re}\lambda>\bar{m}-\underline{\mu}$ で存在することがわかる。また考えている人口集団の再生産年齢の上限を $\beta<\infty$ とすれば

$$\Psi(a)=0,\ a\geqq\beta,\ G(t)=0,\ t\geqq\beta, \tag{3.3}$$

であるから，$\hat{\Psi}(\lambda)$，$\hat{G}(\lambda)$ はすべての λ について存在する．関数の畳込み（convolution）のラプラス像は各関数のラプラス像の積に等しい．したがって（2.7）にラプラス変換を行えば，

---

12) R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, New York San Francisco London : Academic Press, 1963, Chapter 7.

$$\widehat{B}(\lambda)=\widehat{G}(\lambda)+\widehat{\Psi}(\lambda)\widehat{B}(\lambda),\ \mathrm{Re}\lambda>\bar{m}-\underline{\mu}. \tag{3.4}$$

そこでいま集合Ωを

$$\Omega=\{\lambda\in C\,;\,\det(I-\widehat{\Psi}(\lambda))=0\}=\{\lambda\in C\,;\,1\in\sigma(\widehat{\Psi}(\lambda))\}, \tag{3.5}$$

として定義しよう．ただし$\sigma(A)$は行列Aのスペクトル集合を表す．このとき（3.4）から

$$\widehat{B}(\lambda)=(I-\widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\widehat{G}(\lambda),\ \lambda\in\{\lambda\in C\,;\,\mathrm{Re}\lambda>\bar{m}-\underline{\mu}\}\setminus\Omega. \tag{3.6}$$

$\widehat{B}(\lambda)$は$C\setminus\Omega$へ解析接続されて，特異点Ωを除いて解析的な関数となる．$I-\widehat{\Psi}(\lambda)$は$\lambda$の整関数であるから，$\widehat{B}(\lambda)$の特異点は有理型関数$(I-\widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}$の極からなる．もし$B(t)$が連続で有界変動であれば（3.6）は反転されて

$$B(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp(\lambda t)(I-\widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\widehat{G}(\lambda)d\lambda,\ \sigma>\bar{m}-\underline{\mu}, \tag{3.7}$$

を得る．このとき一般に$B(t)$の漸近挙動は特異点Ωの分布に依存している．そこで以下でΩの構造を調べる．

定理 3.2：$\lambda\in\Omega$について以下が成り立つ．

(1)　Ωは半平面$\mathrm{Re}\lambda\leqq\bar{m}-\underline{\mu}$に含まれる．

(2)　任意の$a\in R$に対して半平面$\mathrm{Re}\lambda>a$上には高々有限個の$\lambda\in\Omega$しか存在しない．

(3)　$\lambda\in\Omega$であれば$\bar{\lambda}\in\Omega$でもある．ただし$\bar{\lambda}$はλの複素共役である．

（証明）　$F(r)$, $r\in R$は特性行列$\widehat{\Psi}(r)$のフロベニウス根を表すとする．また$\widehat{F}(\lambda)$, $\lambda\in C$を非負行列$\widehat{\Psi}^*(\lambda)$のフロベニウス根とする．ただし$\widehat{\Psi}^*(\lambda)$は$\widehat{\Psi}(\lambda)$の第$(i,j)$要素$\widehat{\psi}_{ij}(\lambda)$の絶対値をその第$(i,j)$要素とする非負行列である．$\mathrm{spr}(A)$を行列$A$のスペクトル半径とすれば，$\mathrm{spr}(\widehat{\Psi}(\lambda))\leqq\widehat{F}(\lambda)$となることがわかる．[13] 一方，$\widehat{\Psi}^*(\lambda)\leqq\widehat{\Psi}(\mathrm{Re}\lambda)$であるから，$\widehat{F}(\lambda)\leqq F(\mathrm{Re}\lambda)$となる．したがって，$\mathrm{spr}(\widehat{\Psi}(\lambda))\leqq F(\mathrm{Re}\lambda)$を得る．

$$|\widehat{\Psi}(\mathrm{Re}\lambda)|\leqq\int_0^\infty|\Psi(v)|\exp(-\mathrm{Re}\lambda v)dv$$

$$\leqq\int_0^\infty|M(v)||L(v)|\exp(-\mathrm{Re}\lambda v)dv\leqq\frac{\bar{m}}{\mathrm{Re}\lambda+\underline{\mu}}.$$

したがって

$$F(\mathrm{Re}\lambda)\leqq\max_j\sum_{i=1}^{n}\widehat{\psi}_{ij}(\mathrm{Re}\lambda)=|\widehat{\Psi}(\mathrm{Re}\lambda)|\leqq\frac{\bar{m}}{\mathrm{Re}\lambda+\underline{\mu}}.$$

これから，$\mathrm{Re}\lambda>\bar{m}-\underline{\mu}$であれば，$\mathrm{spr}(\widehat{\Psi}(\lambda))<1$となり，$\Omega$は$\mathrm{Re}\lambda\leqq\bar{m}-\underline{\mu}$に含まれることがわかる．次に，(2)を示そう．(1)から，任意の帯状領域$a\leqq\mathrm{Re}\lambda\leqq b$に高々有限個の$\lambda\in\Omega$しか存在しないことを示せば十分である．いま無数の$\Omega$の要素$\lambda_n=\alpha_n+i\beta_n$, $n=1,2,\cdots$,が存在して，$a\leqq\alpha_n\leqq b$であるとする．$\det(I-\widehat{\Psi}(\lambda))$は$|\lambda|<\infty$で正則で恒等的には零でないから$\infty$以外にその

13）二階堂副包,『経済のための線形数学』, 培風館, 1961年, p. 114.

零点は集積しない．したがって部分列$\lambda_{n(k)}$, $k=1, 2, \cdots$がとれて，$\alpha_{n(k)} \to \alpha^*$, $\beta_{n(k)} \to \infty$とできる．このとき

$$|\hat{\psi}_{ij}(\lambda_{n(k)}) - \int_0^\infty \exp(-\alpha^*\zeta)\exp(-i\beta_{n(k)}\zeta)\psi_{ij}(\zeta)d\zeta| \to 0, (k \to 0)$$

一方，Riemann - Lebesgue の補題[14]から，

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha^*\zeta)\exp(-i\beta_{n(k)}\zeta)\psi_{ij}(\zeta)d\zeta \to 0, (k \to 0)$$

したがって，$\hat{\psi}_{ij}(\lambda_{n(k)}) \to 0$ $(k \to \infty)$ であり，$\lim_{k\to\infty} \det(I - \hat{\Psi}(\lambda_{n(k)})) = 1$ となるが，これは$\lambda_{n(k)} \in \Omega$に矛盾する．よって(2)が示された．(3)は明らかであろう．□

次の定理はΩが空でなく，しかも実部が最大の特異点として実の特異点が得られる一つの十分条件を与える．

定理 3.3：純再生産行列$\hat{\Psi}(0) = \int_0^\infty \Psi(a)da$が分解不能であれば，

(1) $r_0 \in \Omega \cap R$が存在して，$r_0 > \sup\{\mathrm{Re}\lambda ; \lambda \in \Omega, r_0 \neq \lambda\}$．このとき非負行列$\hat{\Psi}(r_0)$はフロベニウス根1をもつ。$F(0)$を$\hat{\Psi}(0)$のフロベニウス根とすれば，(1) $F(0) < 1$であれば$r_0 < 0$（劣臨界），(2) $F(0) = 1$であれば$r_0 = 0$（臨界），(3) $F(0) > 1$であれば$r_0 > 0$（過臨界），となる．

(2)　$R(\lambda) = (I - \hat{\Psi}(\lambda))^{-1}$は$\lambda = r_0$で一位の極を有し，その留数$R_{-1}$は

$$R_{-1}\phi = \left[\frac{d}{d\lambda}\det(I - \hat{\Psi}(\lambda))|_{\lambda=r_0}\right]^{-1} \mathrm{adj}(I - \hat{\Psi}(r_0))\phi \qquad (3.8\mathrm{a})$$

$$= \frac{\langle f_0, \phi \rangle}{\langle f_0, -\Psi_1 \psi_0 \rangle}\psi_0, \qquad (3.8\mathrm{b})$$

として与えられる。ここで$\mathrm{adj}(I - \hat{\Psi}(r_0))$は$(I - \hat{\Psi}(r_0))$の余因子行列であり，${}^tf_0$，$\psi_0$はそれぞれ$\hat{\Psi}(r_0)$のフロベニウス根1に属する左右の固有ベクトルであり，$-\Psi_1$は以下で与えられる．

$$-\Psi_1 = \int_0^\infty a\Psi(a)\exp(-r_0 a)da. \qquad (3.9)$$

（証明）　仮定のもとでは，$\hat{\Psi}(r)$, $r \in R$は非負の分解不能行列である．よってフロベニウス根$F(r) > 0$が存在して，パラメータrに関して狭義単調減少で連続な関数である．$F(r)$は以下の不等式を満たす[15]．

$$\min_j \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_{ij}(r) \leq F(r) \leq \max_j \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_{ij}(r).$$

したがって，$\lim_{r\to-\infty} F(r) = +\infty$, $\lim_{r\to+\infty} F(r) = 0$を得るから，方程式$F(r) = 1$は唯一の実根$r_0$を有する．しかも$F(0) = 1$ならば$r_0 = 0$, $F(0) > 1$ならば$r_0 > 0$, $F(0) < 1$ならば$r_0 < 0$となる．また$r_0 \in$

14) 補題3.5参照．
15) 二階堂，前掲書，p. 88.

Ωは明らかである．$\mu \in \Omega$とすれば$\widehat{\Psi}(r)$の分解不能性から，$\mathrm{Re}\mu > r_0$ ならば$F(\mathrm{Re}\mu) < 1$, $\mathrm{Re}\mu = r_0$ ならば$F(\mathrm{Re}\mu) = 1$, $\mathrm{Re}\mu < r_0$ ならば$F(\mathrm{Re}\mu) > 1$となり，一方，$1 \in \sigma(\widehat{\Psi}(\mu))$からspr$(\widehat{\Psi}(\mathrm{Re}\mu)) = F(\mathrm{Re}\mu) \geqq$ spr$(\widehat{\Psi}(\mu)) \geqq 1$，よって$\mathrm{Re}\mu \leqq r_0$を得る．もし$\mathrm{Im}\mu \neq 0$であれば，$\widehat{\Psi}^*(\mu) \leq \widehat{\Psi}(\mathrm{Re}\mu)$であるから，$1 \leqq$ spr$(\widehat{\Psi}(\mu)) \leqq \widehat{F}(\mu) < F(\mathrm{Re}\mu)$．よって$\mathrm{Re}\mu < r_0$．したがって$r_0 > \sup\{\mathrm{Re}\lambda ; \lambda \in \Omega, r_0 \neq \lambda\}$を得る．また内積$< f_0, -\Psi_1 \psi_0 >$がゼロでないから，Schumitzky and Wenska (1975) の作用素留数定理[16]からr_0が$(I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}$の一位の極であることがわかる．(3.8 a) はあきらかであるから (3.8 b) を示そう．恒等式

$$(I - \widehat{\Psi}(\lambda))\,\mathrm{adj}\,(I - \widehat{\Psi}(\lambda)) = \det\,(I - \widehat{\Psi}(\lambda)) \cdot I,$$

を微分して

$$\frac{d}{d\lambda}(I - \widehat{\Psi}(\lambda))\Big|_{\lambda = r_0} \times \mathrm{adj}\,(I - \widehat{\Psi}(r)) +$$

$$(I - \widehat{\Psi}(r))\frac{d}{d\lambda}\mathrm{adj}\,(I - \widehat{\Psi}(\lambda))\Big|_{\lambda = r_0} = \frac{d}{d\lambda}\det\,(I - \widehat{\Psi}(\lambda))\Big|_{\lambda = r_0} \cdot I,$$

また

$$(I - \widehat{\Psi}(r_0))\,\mathrm{adj}\,(I - \widehat{\Psi}(r_0))\phi = 0,$$

であり，$\widehat{\Psi}(r_0)$のフロベニウス根1に対応する固有空間は一次元であるから，あるスカラー，cが存在して，

$$\mathrm{adj}\,(I - \widehat{\Psi}(r_0))\phi = c \cdot \psi_0,$$

とかける．また${}^t f_0 (I - \widehat{\Psi}(r_0)) = 0$であるから$f_0$，$\phi$を左右からかければ，

$$c < f_0, -\Psi_1 \psi_0 > = < f_0, \phi > \frac{d}{d\lambda}\det\,(I - \widehat{\Psi}(\lambda))\Big|_{\lambda = r_0}.$$

これより，

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\det\,(I - \widehat{\Psi}(\lambda))\Big|_{\lambda = r_0}\right]^{-1}\mathrm{adj}\,(I - \widehat{\Psi}(r_0))\phi = \frac{< f_0, \phi >}{< f_0, -\Psi_1 \psi_0 >}\psi_0,$$

を得る．よって (3.8 b) がしめされた．□

上記の定理からわかるように，純再生産行列$\widehat{\Psi}(0)$のフロベニウス根$F(0)$は，一次元の場合の純再生産率 (net reproduction rate) の多次元的アナログに他ならない．またr_0は安定人口成長率 (intrinsic growth rate) を与えることが期待される。すなわち，$B(t)$の積分表現 (3.7) において，積分路をr_0の左側へシフトすることによって (図1参照)

$$B(t) = \gamma \exp(r_0 t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \exp(\lambda t)(I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\widehat{G}(\lambda)\,d\lambda, \qquad (3.10)$$

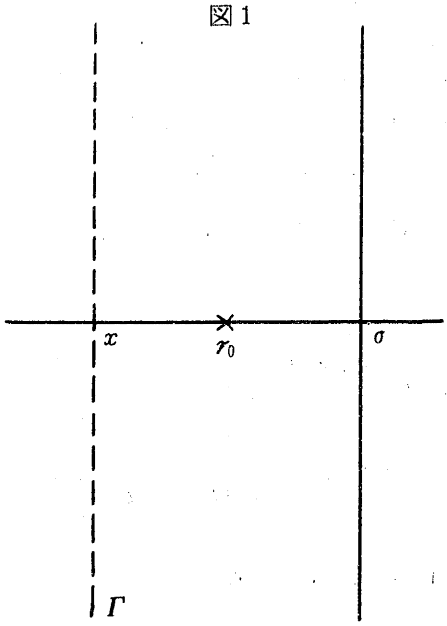
$$\gamma = \operatorname*{Res}_{\lambda = r_0}(I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\widehat{G}(\lambda),$$

16) A. Schumitzky and T. Wenska "An operator residue theorem with applications to branching processes and renewal type integral equations". *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 6 (2), 1975, pp. 229-235.

$$\Gamma = \{ z\ ;\ z = x + iy,\ r_0 > x > \sup\{ \mathrm{Re}\lambda\ ;\ \lambda \in \Omega,\ r_0 \neq \lambda \},\ -\infty < y < +\infty \},$$

となり，$\varepsilon > 0$ が存在して

図1



$$B(t) = \gamma \exp(r_0 t) + O(\exp[(r_0 - \varepsilon)t]), \qquad (3.11)$$

となればよい[17]．しかし（3.10）に対して積分項の評価を与えるのは簡単ではない．そこで以下では Heijmans（1986）[18] の方法にしたがって，$B(t)$ のかわりに

$$J(t) = B(t) - G(t) = \int_0^t \Psi(a) B(t - a)\, da, \qquad (3.12)$$

とおいて，$J(t)$ の漸近展開をもとめることにする。明らかに $J(t)$ は時刻 $t = 0$ 以降に出生した人口を親とする新生児の出生率に他ならない．このために以下でいくつかの定義と結果をかかげておく。

一般に Xを Banach 空間とするとき，Hardy - Lebesgue 族$H^p(\alpha : X)$ とは，$\mathrm{Re}\lambda > \alpha$ からX への解析関数 $g(\lambda)$ で以下の条件をみたすものを言う．

a） $\sup_{\sigma > \alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} | g(\sigma + i\tau) |^p d\tau \right] < \infty,$ （3.13a）

b） $g(\alpha + i\tau) = \lim_{\sigma \to +\alpha} g(\sigma + i\tau)$ がほとんどいたるところ存在して，（3.13b）

$L^p(-\infty, \infty ; X)$ に属する．

Hardy - Lebesgue 族に対して以下が成り立つ．

定理 3.4（Friedman and Shinbrot, 1967[19]）: $g(\lambda) \in H^1(\alpha : X)$，$\alpha \geqq 0$ とすれば，関数

17) Bellman-Cooke, 前掲書, pp. 231-234.

18) H. J. A. M. Heijmans, "The dynamical behaviour of the age-size-distribution of a cell population", In *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, J. A. J. Metz and O. Diekmann (eds), Springer-Verlag, 1986, pp. 185-202.

19) A. Friedman and M. Shinbrot, "Volterra integral equations in Banach space", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 126, No. 1, 1967, pp. 131-179.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \exp(\lambda t) g(\lambda)\, d\lambda,\ \gamma \geqq \alpha,$$

がすべての$t\in(-\infty, +\infty)$ に関してγに無関係に定義され，以下が成り立つ．

(1) $f(t)$はtについて連続で，かつ$f(t)=0,\ t<0$である．

(2) $\hat{f}(\lambda)=g(\lambda)$,

(3) $\alpha=0$ならば，$\lim_{t\to\infty} f(t)=0$.

補題 3.5 （Riemann-Lebesgue）：$f\in L^1(0, \infty; C)$とし，そのラプラス変換を$\hat{f}$とすれば$(0, \infty)$の有界な閉区間上のxについて一様に

$$\lim_{|y|\to\infty} \hat{f}(x+iy)=0。 \tag{3.14}$$

補題 3.6 （Plancherel）：$F\cdot f$を関数$f\in L^1(-\infty, +\infty; C)\cap L^2(-\infty, +\infty; C)$のFourier変換，すなわち

$$(F\cdot f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iya) f(a) da,$$

とすれば，$F\cdot f\in L^2(-\infty, \infty; C)$であり，Parseval の等式

$$\| F\cdot f\|_{L^2} = \| f\|_{L^2}, \tag{3.15}$$

がなりたつ．ただし$\|\cdot\|_{L^2}$はL^2ノルムを示す。

さて，（3.12）で定義した$J(t)$のラプラス変換をとれば，

$$\hat{J}(\lambda)=\hat{\Psi}(\lambda)\hat{B}(\lambda)=\hat{\Psi}(\lambda)\,(\hat{J}(\lambda)+\hat{G}(\lambda)).$$

したがって

$$\hat{J}(\lambda)=(I-\hat{\Psi}(\lambda))^{-1}\hat{\Psi}(\lambda)\hat{G}(\lambda),\ \lambda\in C\setminus\Omega, \tag{3.16}$$

を得る．$J(t)$のラプラス逆変換表示の漸近評価を得るために以下の補題を示そう．

補題 3.7 ：yの関数$\hat{G}(x+iy)$，$\hat{\Psi}(x+iy)$，$x\in R$はそれぞれ$L^2(-\infty, +\infty; C^n)$，$L^2(-\infty, +\infty; B(C^n, C^n))$の要素であり，$y$の関数として$\hat{\Psi}(x+iy)\hat{G}(x+iy)\in L^1(-\infty, +\infty: C^n)$である．

（証明） $G(t)$と$\Psi(a)$の定義域を$G(t)=0,\ t<0$および$\Psi(a)=0,\ a<0$と拡張しておけば，関数$t\to\exp(-tx)G(t)$，$a\to\exp(-ax)\Psi(a)$はすべての実数xに対してそれぞれ$L^1(-\infty, +\infty; C^n)\cap L^2(-\infty, +\infty; C^n)$，$L^1(-\infty, +\infty; B(C^n, C^n))\cap L^2(-\infty, +\infty; B(C^n, C^n))$の要素である．補題 3.6 から

$$\hat{G}(x+iy)=\sqrt{2\pi}\,(F\cdot\exp(-tx)G(t))(y)\in L^2(-\infty, +\infty; C^n)$$

$$\hat{\Psi}(x+iy)=\sqrt{2\pi}\,(F\cdot\exp(-ax)\Psi(a))(y)\in L^2(-\infty, +\infty; B(C^n, C^n)),$$

を得る．Schwartz の不等式からただちに$\hat{\Psi}(x+iy)\hat{G}(x+iy)\in L^1(-\infty, +\infty; C^n)$となることがわかる．□

補題 3.8：$\alpha > r_0$ とすれば，$\widehat{J}(\lambda) \in H^1(\alpha ; C)$ である．

（証明）　十分大なる η_0 に対して，補題3.5から $\| (I - \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta))^{-1} \| \leqq 2,\ |\eta| \geqq \eta_0$ となることがわかる．一方，$\zeta \geqq \alpha$ において関数 $\eta \to (I - \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta))^{-1}$ は区間 $[-\eta_0, \eta_0]$ 上で連続であるから，ある $C>0$ が存在して，

$$\| (I - \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta))^{-1} \| < C,\ \eta \in (-\infty, \infty),$$

それゆえ

$$\| \widehat{J}(\zeta+i\eta) \| \leqq \| (I - \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta))^{-1} \| \, \| \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta)\, \widehat{G}(\zeta+i\eta) \|$$

$$< C \| \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta)\, \widehat{G}(\zeta+i\eta) \| .$$

$\zeta \geqq \alpha$ であれば，Schwartzの不等式およびParseval の等式より，

$$\| \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta)\, \widehat{G}(\zeta+i\eta) \|^2 \leqq \| \widehat{\Psi}(\zeta+i\eta) \|_{L^2} \| \widehat{G}(\zeta+i\eta) \|_{L^2}$$

$$\leqq 2\pi \| \exp(-\alpha a)\, \Psi(a) \|_{L^2} \| \exp(-\alpha t)\, G(t) \|_{L^2} < \infty .$$

したがって（3.13a）を得る．また $\zeta \geqq \alpha$ では $\widehat{J}(\zeta+i\eta)$ は解析的であるから（3.13b）が成り立つ．
□

以上の準備のもとで以下の展開定理が示される．

定理 3.9：λ_i，$i = 1, 2, \cdots, n$ を位数 k_i の $\widehat{J}(\lambda)$ の極であるとする．また λ_i は $\mathrm{Re}\lambda_1 \geqq \mathrm{Re}\lambda_2 \geqq \cdots \geqq \mathrm{Re}\lambda_n > \delta$ と順序づけられているとする．このとき

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i t) \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{-j}^{(i)}}{(j-1)!} t^{j-1} \right\} + O(\exp(\delta t)). \tag{3.17}$$

ただし，ここで

$$A_{-j}^{(i)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} (\lambda - \lambda_i)^{j-1} \widehat{J}(\lambda) d\lambda, \tag{3.18}$$

であり，Γ_i は λ_i を囲む閉曲線で，λ_i 以外の Ω の点をその内部に含まないとする．

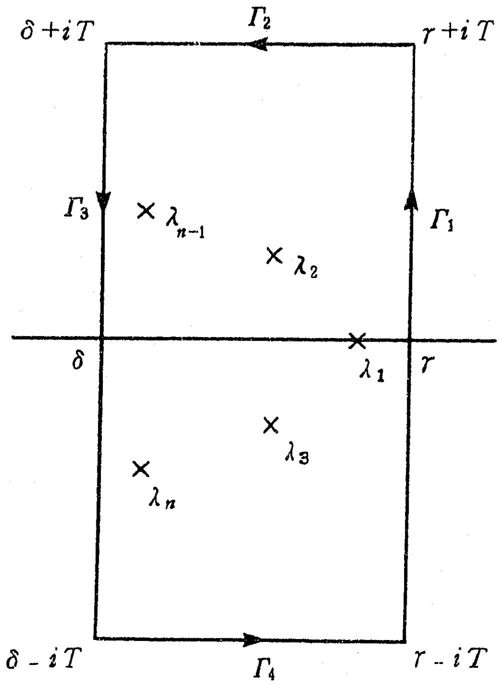
（証明）　$\gamma > \max(0, \lambda_1)$ とすれば，定理3.4と補題3.7から反転表示

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \exp(\lambda t)\, \widehat{J}(\lambda) d\lambda, \tag{3.19}$$

を得る．ここで積分路 $\mathrm{Re}\lambda = \gamma$ を特異点 λ_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ を越えて $\mathrm{Re}\lambda = \delta$ までシフトさせることを考える．Γ を図2のような特異点 λ_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ を内部に含む長方形の積分路としよう．このとき Riemann - Lebesgue の補題から

$$\lim_{T \to \infty} \int_{\Gamma_i} \exp(\lambda t)\, \widehat{J}(\lambda) d\lambda = 0,\ i = 2, 4,$$

図 2



$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$$

となることがわかる．したがってCauchyの定理から

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda i} \left\{ \exp(\lambda t) \widehat{J}(\lambda) \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp(\lambda t) \widehat{J}(\lambda) d\lambda , \tag{3.20}$$

を得る．ここで $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i} \{ \exp(\lambda t) \widehat{J}(\lambda) \}$ は $\lambda = \lambda_i$ における $\exp(\lambda t) \widehat{J}(\lambda)$ の留数を示す．

$(I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}$ は積分路 $\mathrm{Re}\lambda = \delta$ 上で有界であるから

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp(\lambda t) \widehat{J}(\lambda) d\lambda \right| \leqq M(\delta) \exp(\delta t). \tag{3.21}$$

ここで

$$M(\delta) = \sup_{-\infty<y<+\infty} | (I - \widehat{\Psi}(\delta+iy))^{-1} | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | \widehat{\Psi}(\delta+iy) \widehat{G}(\delta+iy) | dy , \tag{3.22}$$

である．したがって (3.20) と (3.21) から漸近展開

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda i} \left\{ \exp(\lambda t) \widehat{J}(\lambda) \right\} + O(\exp(\delta t)). \tag{3.23}$$

を得る．留数計算によってただちに (3.17) を得る．□

定理 3.3 と定理 3.9 から以下の結果を得る．

定理 3.10：定理 3.3 の仮定の下で以下が成り立つ。

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-r_0 t)\ B(t) = \frac{< f_0,\ \widehat{G}(r_0) >}{< f_0,\ -\Psi_1\ \psi_0 >}\psi_0\ , \tag{3.24}$$

ここで f_0，ψ_0 はそれぞれ $\widehat{\Psi}(r_0)$ のフロベニウス根 1 に属する左右の固有ベクトルであり，$-\Psi_1$ は（3.9）で与えられる．

（証明）　定理 3.3 と定理 3.9 から以下の漸近展開を得る．

$$B(t) = G(t) + \operatorname*{Res}_{\lambda=r_0}\left\{\exp(\lambda t)\ \widehat{j}(\lambda)\right\} + O(\exp(\delta t)),\ \delta < r_0\ .$$

ここで

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=r_0} \widehat{j}(\lambda) = \operatorname*{Res}_{\lambda=r_0} (I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\ \widehat{\Psi}(\lambda)\widehat{G}(\lambda)$$

$$= \operatorname*{Res}_{\lambda=r_0}\left\{ (I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\ \widehat{G}(\lambda) - \widehat{G}(\lambda) \right\} = \operatorname*{Res}_{\lambda=r_0} (I - \widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\widehat{G}(\lambda),$$

である．r_0 は一位の極であったから，（3.8 a），（3.8 b）より

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=r_0}\left\{\exp(\lambda t)\ \widehat{j}(\lambda)\right\} = \exp(r_0 t)\ \frac{< f_0,\ \widehat{G}(r_0) >}{< f_0,\ -\Psi_1\ \psi_0 >}\psi_0\ ,$$

となる．よって（3.24）が従う．□

いま，$\lambda_i \in \Omega$ が単根であれば，（3.17）より漸近展開

$$B(t) = G(t) + \sum_{i=1}^{n} A_{-1}^{(i)} \exp(\lambda_i t) + O(\exp(\delta t)), \tag{3.25}$$

を得る．$G(t) = 0, t \geqq \beta$ であったから，

$$B(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{-1}^{(i)} \exp(\lambda_i t) + O(\exp(\delta t)),\ t \geqq \beta\ , \tag{3.26}$$

となる．一方，これまで多くの人口学者は，Lotka 以来しばしば特性根 λ_i が無数に存在すれば，級数展開

$$B(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{-1}^{(i)} \exp(\lambda_i t),\ \lambda_i \in \Omega,\ t \geqq 0, \tag{3.27}$$

がなりたつかのごとく考えている（Keyfitz，1977；Coale，1975；Rogers，1975）[20]．しかしこのような級数展開は一般には成り立たないことは Feller（1941）が示したとうりである．Lopez（1961）[21] は（3.27）が $\Psi(a)$，$G(t)$ が有界な台をもつ場合には成立することを示そうと試みたが，成功したとは云い難いと筆者は考える．定理 3.9 の証明からわかるように，（3.27）が $t \geqq \beta$ で成り立つためには

$$\lim_{\delta\to-\infty} M(\delta)\exp(\delta t) = 0, \tag{3.28}$$

20）Coale, Keyfitz, Rogers, 前掲書（注 2）.

21）Lopez 前掲書（注 2）.

となることが十分である．また，反転公式

$$B(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp(\lambda t)(I-\widehat{\Psi}(\lambda))^{-1}\widehat{G}(\lambda)\,d\lambda,\ \sigma>r_0, \tag{3.29}$$

が成り立っている場合には，級数展開（3.27）が成り立つための十分条件がいくつか考えられている[22]．しかしこれらの条件が，我々のモデルにおいて一般的に遭遇する $\Psi(a)$，$G(t)$ に関する条件のもとで成り立つかどうかはわかっていない．一方，我々の目的である強エルゴード定理を示すためには漸近展開で十分であることはいうまでもない．

Ⅳ　強エルゴード定理

前節までの諸結果から年齢密度関数の漸近挙動に関する結論が導きだされる．

定理 4.1：定理 3.3 の仮定の下で，

$$\lim_{t\to\infty}\exp(-r_0 t)\,p(a,t)=\gamma\,\psi_0(a), \tag{4.1}$$

が任意の $0<A<\infty$ について年齢区間［0，A］上で一様に成り立つ．ただし，

$$\psi_0(a)=\exp(-r_0 a)\,L(a)\psi_0,\ \gamma=\frac{<f_0,\widehat{G}(r_0)>}{<f_0,-\Psi_1\psi_0>}=\frac{V(0)}{<f_0,-\Psi_1\psi_0>}, \tag{4.2}$$

である．$V(t)$，$t\geqq 0$ は総繁殖価（total reproductive value）であり，繁殖価ベクトル（reproductive value vector）$f_0(a)$ を

$$f_0(a)={}^{\tau}L^{-1}(a)\int_a^{\infty}\exp[-r_0(\rho-a)]\,{}^{\tau}\Psi(\rho)d\rho\cdot f_0, \tag{4.3}$$

と定義すれば，

$$V(t)=\int_0^{\infty}<f_0(a),\,p(a,t)>da, \tag{4.4}$$

で与えられる．ただし，${}^{\tau}f_0$ は $\widehat{\Psi}(r_0)$ の固有値 1 に属する左固有ベクトルである．

（証明）　いま $q(a,t)$ を

$$p(a,t)=\exp(r_0 t)\{\gamma\,\psi_0(a)+\exp(-r_0 a)\,L(a)q(a,t)\}, \tag{4.5}$$

によって定義すれば，以下が成り立つ．

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t}\right)q(a,t)=0, \tag{4.6a}$$

22) R. V. Churchill, "The inversion of the Laplace transformation by a direct expansion in series and its application to boundary-value problems", *Mathematische Zeitschrift* 42, 1937, pp.567-579. 宇野利雄，洪妊植，『ラプラス変換』，共立出版，1974年，pp. 143-145.

$$q(0,t)=p(0,t)\exp(-r_0 t)-\gamma\psi_0,\tag{4.6b}$$

（4.6a）から，$t-a>0$ では $q(a,t)=q(0,t-a)$ となる．（4.6b）および定理3.10から，$\lim_{t\to\infty}|q(0,t)|=0$ であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して $T>0$ が存在して，$|q(0,t)|<\varepsilon, t>T$ となる．そこで $0\leqq a\leqq A$ なるすべての a について，$t>T+A$ で $|q(a,t)|=|q(0,t-a)|<\varepsilon$ となり，$|\exp(-r_0 t)p(a,t)-\gamma\psi_0(a)|=|\exp(-r_0 a)L(a)q(a,t)|<\max(1,\exp(-r_0 A))\varepsilon$．したがって（4.1）が区間 $[0,A]$ 上で一様に成り立つことがわかる．また

$$\langle f_0,\hat{G}(\lambda)\rangle={}^{\tau}f_0\int_0^\infty \exp(-r_0 t)\ G(t)dt$$

$$={}^{\tau}f_0\int_0^\infty \exp(-r_0 t)\int_t^\infty \Psi(a)L^{-1}(a-t)\phi(a-t)\,dadt$$

$$=\int_0^\infty {}^{\tau}f_0\int_s^\infty \Psi(a)\exp[-r_0(a-s)]\,daL^{-1}(s)\phi(s)ds=\int_0^\infty\langle f_0(s),\phi(s)\rangle ds=V(0).$$

これより（4.2）を得る．□

ここで繁殖価ベクトルの意味を考えておこう[23]．まずその形式的な意味をあきらかにしておく．いま人口作用素（population operator[24]）A を

$$A=-\frac{d}{da}+Q(a),\tag{4.7}$$

$$D(A)=\left\{\psi\in L^1(0,\infty;C^n);A\psi\in L^1(0,\infty;C^n),\psi(0)=\int_0^\infty M(a)\psi(a)da\right\},$$

と定義する．ここで $D(A)$ は作用素 A の定義域を示す．作用素 A の固有値問題を考える．すなわち，

$$\left(-\frac{d}{da}+Q(a)\right)\psi(a)=\lambda\psi(a),\quad \psi(0)=\int_0^\infty M(a)\ \psi(a)\,da.\tag{4.8}$$

（4.8）は容易に解かれて，固有関数 $\psi_\lambda(a)$ は

$$\psi_\lambda(a)=\exp(-\lambda a)\ L(a)\psi_\lambda,\ \lambda\in\Omega,\ \psi_\lambda\in N(I-\hat{\Psi}(\lambda)),\tag{4.9}$$

で与えられる．ただし $N(A)$ は行列 A の零空間（null space）を示す．このとき明らかに $\exp(\lambda t)\psi_\lambda(a)$ は（2.3）の特殊解を与える．A の共役作用素 A^* を

$$A^*f(a)=\frac{d}{da}f(a)+{}^{\tau}Q(a)f(a)+{}^{\tau}M(a)f(0),\tag{4.10}$$

$$D(A^*)=\{f\in L^\infty(0,\infty;C^n);A^*f\in L^\infty(0,\infty;C^n),f(\infty)=0\},$$

23）繁殖価ベクトルは以下で初めて導入されたと思われる．A. Rogers and F. Willekens, "The spatial reproductive value and the spatial momentum of zero population growth", *Environment and Planning* A, 10, 1978, pp. 503-518.

24）人口作用素という名称は以下に従った．J. Song, C. H. Tuan and J. Y. Yu, *Population Control in China : Theory and Applications*, New York : Praeger, 1985.

と定義すれば，$y \in D(A^*)$，$x \in D(A)$ に対して常に

$$\int_0^\infty < y(a),\ Ax(a) > da = \int_0^\infty < A^* y(a),\ x(a) > da, \tag{4.11}$$

が成り立つ．A^* の固有値問題

$$A^* f = \lambda f,\ f \in D(A^*), \tag{4.12}$$

を解けば，固有関数 $f_\lambda(a)$ として以下を得る．

$$f_\lambda(a) = {}^\tau L^{-1}(a) \int_a^\infty \exp[-\lambda(\rho - a)]^\tau \Psi(\rho) d\rho \cdot f_\lambda. \tag{4.13}$$

ただし，ここで $f_\lambda \in N(I - {}^\tau\hat{\Psi}(\lambda))$ である．すなわち，繁殖価ベクトルは共役固有値問題（4.12）の固有値 r_0 に対応する固有関数として得られる．またこのとき（4.11）から

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_0^\infty < f_0(a),\ \frac{\partial}{\partial t}p(a,t) > da = \int_0^\infty < f_0(a),\ Ap(a,t) > da$$

$$= \int_0^\infty < A^* f_0(a),\ p(a,t) > da = r_0 V(t).$$

よって

$$V(t) = \exp(r_0 t) V(0), \tag{4.14}$$

を得る．すなわち，総繁殖価は指数関数的に増大する（ Fisher の原理 ）．上記のような形式的誘導とは別に，人口学的な意味から繁殖価ベクトルを導くことができる．いまゼロ歳の人口の繁殖価ベクトルが v で与えられるとしよう．a 歳の人口の繁殖価は，その人口が安定成長下において a 歳以後に生む新生児がもつ繁殖価をマルサス径数（安定人口成長率）で割り引いたものの総和であると定義される．そこでいま i - 状態に単位人口がいるとすれば，初期ベクトル $\phi_i(a)$ を，第 i 要素のみがデルタ関数 $\delta(a)$ であり，それ以外の要素がゼロであるベクトル

$$\phi_i(a) = {}^\tau(0,\ \cdots,\ \overset{i}{\delta(a)},\ 0,\ \cdots),$$

とすれば，i - 状態の新生児のもつ繁殖価 v_i は定義により

$$v_i = < v,\ \int_0^\infty \int_t^\infty \exp(-r_0 a)\ M(a) L(a, a-t)\ \phi_i(a-t)\ da\,dt >$$

$$= < v,\ \int_0^\infty \exp(-r_0 a)\ \Psi(a) da \cdot e_i > = < v,\ e_i >,$$

ここで e_i は i - 要素が 1 で他はすべて 0 となる単位ベクトルである．これがすべての i で成り立つから

$${}^\tau v \int_0^\infty \exp(-r_0 a)\ \Psi(a) da = {}^\tau v,$$

でなければならない．すなわち $v \in N(I - {}^{\tau}\widehat{\Psi}(r_0))$ である．同様にして i - 要素だけがデルタ関数 $\delta(s-a)$ であって，他の要素はすべてゼロであるベクトルを

$$p_i(s) = {}^{\tau}(0, \cdots, \overset{i}{\delta(s-a)}, 0, \cdots, 0),$$

とおけば i - 状態の a 歳人口の繁殖価 $v_i(a)$ を第 i 要素とするベクトル $v(a)$ について

$$<v(a), e_i> = v_i(a) = <v, \int_0^\infty \int_s^\infty \exp[-r_0(\rho - s)] M(\rho) L(\rho, s) p_i(s) d\rho ds>$$

$$= <v, \int_a^\infty \exp[-r_0(\rho - a)] \Psi(\rho) d\rho L^{-1}(a) e_i>.$$

よって

$$v(a) = {}^{\tau}L^{-1}(a) \int_a^\infty \exp[-r_0(\rho - a)] {}^{\tau}\Psi(\rho) d\rho \cdot v,$$

を得る．すなわち再び（4.13）において $\lambda = r_0$ としたものを得る．

つぎに L^1 - 収束の意味での安定分布への収束を示そう．

定理 4.2 ： 定理 3.3 の仮定の下で以下が成り立つ．

(1) $r_0 > -\underline{\mu}$ であれば

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^\infty | p(a,t) \exp(-r_0 t) - \gamma \psi_0(a) | da = 0. \tag{4.15}$$

(2) $\underline{\mu} > 0$, $r_0 < 0$ であれば

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^\infty | p(a,t) | da = 0. \tag{4.16}$$

（証明）　（2.8）より

$$\int_0^\infty | p(a,t) \exp(r_0 t) - \gamma \psi_0(a) | da = \int_0^t | \exp(-r_0 t) L(a) B(t-a) - \gamma \psi_0(a) | da$$

$$+ \int_t^\infty | \exp(-r_0 t) L(a, a-t) \phi(a-t) - \gamma \psi_0(a) | da \overset{\mathrm{def}}{=} I + J.$$

定理 3.10から，十分小なる任意の $\varepsilon > 0$ に対して $M(\varepsilon) \geqq 1$ が存在して，

$$| B(t) \exp(-r_0 t) - \gamma \psi_0 | \leqq M(\varepsilon) \exp(-\varepsilon t). \tag{4.17}$$

したがって，$r_0 + \underline{\mu} > \varepsilon > 0$ となるように ε をとれば

$$I \leqq \int_0^t | L(a) | | B(t-a) \exp[-r_0(t-a)] - \gamma \psi_0 | \exp(-r_0 a) da$$

$$\leqq M(\varepsilon)\exp(-\varepsilon t)\int_0^t \exp[-(\underline{\mu}+r_0-\varepsilon)a]da = M(\varepsilon)\exp(-\varepsilon t)\ \frac{1-\exp[-(\underline{\mu}+r_0-\varepsilon)t]}{\underline{\mu}+r_0-\varepsilon}$$

よって $\lim_{t\to\infty} I=0$ となる．同様に

$$J\leqq \exp(-(r_0+\underline{\mu})t)\ \|\phi\|+r\ |\psi_0|\ \frac{\exp(-(r_0+\underline{\mu})t)}{r_0+\underline{\mu}} \to 0\ (t\to\infty).$$

したがって（4.15）を得る．また $r_0<0$, $\underline{\mu}>0$ であれば，$|B(t)|\leqq M(r_0)\exp(r_0 t)$ となる $M(r_0)\geqq 1$ が存在するから，$r_0+\underline{\mu}\neq 0$ であれば，

$$\int_0^\infty |p(a,t)|\,da \leqq \int_0^t |L(a)|\,|B(t-a)|\,da+\int_t^\infty |L(a,a-t)\phi(a-t)|\,da$$

$$\leqq M(r_0)\ \frac{\exp(r_0 t)-\exp(-\underline{\mu}t)}{r_0+\underline{\mu}}+\exp(-\underline{\mu}t)\ \|\phi\|\to 0\quad (t\to\infty).$$

また $r_0+\underline{\mu}=0$ であれば，

$$\int_0^\infty |p(a,t)|\,da \leqq M(r_0)\ \exp(r_0 t)t+\exp(-\underline{\mu}t)\ \|\phi\|\to 0\quad (t\to\infty).$$

よっていずれにせよ（4.16）を得る．□

系 4.3：定理 3.3 の仮定のもとで $r_0>-\underline{\mu}$ であれば，任意の $0<A<\infty$ に対して閉区間 $[0,A]$ 上で一様に

$$\lim_{t\to\infty}\ \frac{p(a,t)}{\|p(\cdot,t)\|} = \frac{\psi_0(a)}{\|\psi_0(a)\|}. \qquad (4.18)$$

（証明） いま $e={}^\tau(1,\cdots,1)$ を要素がすべて 1 である n－ベクトルとすれば，$p(a,t)\geqq 0$ であるから

$$\|p(\cdot,t)\| = \int_0^\infty |p(a,t)|\,da = \int_0^\infty \langle e, p(a,t)\rangle da.$$

一方，定理 4.2 から

$$\left|\int_0^\infty \langle e, p(a,t)\exp(-r_0 a)\rangle da - \int_0^\infty \langle e, r\psi_0(a)\rangle da\right|$$

$$=\left|\int_0^\infty \langle e, p(a,t)\exp(-r_0 t)-r\psi_0(a)\rangle da\right|$$

$$\leqq \int_0^\infty |p(a,t)\exp(-r_0 t)-r\psi_0(a)|\,da\to 0\quad (t\to\infty).$$

したがって

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \langle e, p(a,t)\exp(-r_0 t)\rangle da = \int_0^\infty \langle e, r\psi_0(a)\rangle da.$$

となるから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p(a,t)}{\|p(\cdot,t)\|}=\lim_{t\to\infty}\frac{p(a,t)\exp(-r_0t)}{\int_0^\infty < e, p(a,t) > da\exp(-r_0t)}=\frac{\psi_0(a)}{\|\psi_0(a)\|},$$

を得る．収束の一様性は定理4.1から従う．□

(4.18) は年齢構成係数ベクトルが一定の分布（安定年齢分布）に収束することを示している．また (4.16) は，$r_0<0$ の場合にゼロ解 $p(a,t)\equiv 0$ が大域的に漸近安定 (globally asymptotically stable) であることを示している。定理3.3から $r_0<0$ となるためには $F(0)<1$ となることが必要十分であった。そのためには (1) $(I-\widehat{\Psi}(0))$ の n 個の首座小行列式がすべて正である (Hawkins-Simon's condition), あるいは (2) $\widehat{\Psi}(0)$ の行和または列和の最大値が1より小さい (Brauer-Solow's condition), ことが十分であることがしられている[25].

V　非同次問題ー移住を許す安定人口モデルー

ここでは閉鎖人口の仮定をはずして，移住を許す安定人口モデル[26]を考えよう．このモデルは以下のような非同次項をもつLotka-Von Foerster システムで表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t}\right)p(a,t)=Q(a)p(a,t)+m(a,t), \tag{5.1a}$$

$$p(0,t)=\int_0^\infty M(a)\,p(a,t)\,da, \tag{5.1b}$$

$$p(a,0)=\phi(a). \tag{5.1c}$$

ただし，ここで $m(a,t)$ は純転入人口の年齢密度関数であり，

$$m(a,t)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left[p(a+h,t+h)-L(a+h,a)p(a,t)\right], \tag{5.2}$$

によって定義される。以下では $m(a,t)\geqq 0$ の場合のみを考える．(5.1a) の解を求めよう．いま (a_0,t_0) を固定して，$h\geqq 0$ に対して

$$\hat{p}(h)=p(a_0+h,t_0+h),\ \hat{Q}(h)=Q(a_0+h),\ \hat{m}(h)=m(a_0+h,t_0+h), \tag{5.3}$$

と定義すれば，(5.1a) から1階常微分方程式系

25) H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory*, New York San Francisco London : Academic Press, 1968.

26) このタイプのモデルは，一次元の場合について以下の諸論文において検討されている．H. L. Langhaar, "General population theory in the age-time continuum", *Journal of The Franklin Institute*, 293 (3), 1973, pp. 199-214. T. J. Espenshade, L. F. Bouvier and W. B. Arthur, Immigration and the stable population model, *Demography* 19 (1), 1982, pp.125-133. S. Mitra, Generalization of the immigration and the stable population model, *Demography* 20 (1), 1983, pp. 111-115. T. J. Espenshade, Comment on Mitra's generalization, *Demography* 21 (3), 1984, pp. 431-432. S. Mitra, On Espenshade's Comment on Mitra's generalization, *Demography* 21 (3), 1984, pp. 433-434. S. Mitra and P. Cerone, Migration and stability, *Genus*, Volume XLII-n, 1-2, 1986, pp. 1-12.

$$\frac{d}{dh}\hat{p}(h)=\hat{Q}(h)\hat{p}(h)+\hat{m}(h),\ \hat{p}(0)=p\ (a_0,t_0), \tag{5.4}$$

を得る．（5.4）はただちに解かれて，

$$\hat{p}(h)=\hat{L}(h)\left\{\hat{L}^{-1}(0)\hat{p}(0)+\int_0^h\hat{L}^{-1}(\rho)\hat{m}(\rho)\,d\rho\right\}, \tag{5.5}$$

となる，ただし $\hat{L}(h)=L(a_0+h,a_0)$ である．そこで $(a_0,t_0)=(0,t-a)$, $h=a$ とおけば，

$$p(a,t)=L(a)p(0,t-a)+\int_0^a L(a,\rho)m(\rho,t-a+\rho)\,d\rho,\ t-a\geqq 0. \tag{5.6}$$

また $(a_0,t_0)=(a-t,0)$, $h=t$ とおけば，

$$p(a,t)=L(a,a-t)p(a-t,0)+\int_0^t L(a,a-t+\rho)m(a-t+\rho,\rho)\,d\rho,\ a-t>0. \tag{5.7}$$

を得る．$m(a,t)\geqq 0$ と仮定したから $p(a,t)$ は常に非負に保たれることに注意しよう．（5.6）および（5.7）を（5.1b）に投入すれば以下の再生方程式を得る．

$$B(t)=G(t)+H(t)+\int_0^t\Psi(a)B(t-a)\,da, \tag{5.8}$$

ここで $B(t)=p(0,t)$, $\Psi(a)=M(a)L(a)$,

$$G(t)=\int_t^\infty M(a)L(a,a-t)\phi(a-t)\,da, \tag{5.9a}$$

$$\begin{aligned}H(t)=&\int_0^t M(a)\int_0^a L(a,\rho)m(\rho,t-a+\rho)\,d\rho da\\&+\int_t^\infty M(a)\int_0^t L(a,a-t+\rho)m(a-t+\rho,\rho)\,d\rho da,\end{aligned} \tag{5.9b}$$

であり，$M(a)=0$, $t\geqq\beta$ であったから

$$G(t)=0,\ H(t)=\int_0^\beta M(a)\int_0^a L(a,\rho)m(\rho,t-a+\rho)\,d\rho da,\ t\geqq\beta, \tag{5.10}$$

となることに注意しよう。以下では移住項 $m(a,t)$ が時間に独立である場合のみを考える．このとき

$$H(t)=H_1(t)+H_2(t), \tag{5.11a}$$

$$H_1(t)=\int_0^t M(a)\int_0^a L(a,\rho)m(\rho)\,d\rho da, \tag{5.11b}$$

$$H_2(t)=\int_t^\infty M(a)\int_0^t L(a,a-t+\rho)m(a-t+\rho)\,d\rho da, \tag{5.11c}$$

とおけば，（5.8）の解 $B(t)$ は

$$B_1(t)=H_1(t)+\int_0^t \Psi(a)B_1(t-a)\,da, \tag{5.12a}$$

$$B_2(t)=G(t)+H_2(t)+\int_0^t \Psi(a)B_2(t-a)\,da, \tag{5.12b}$$

の解 $B_1(t)$，$B_2(t)$によって

$$B(t)=B_1(t)+B_2(t), \tag{5.13}$$

で与えられる。（5.12b）においては

$$G(t)+H_2(t)=0,\ t\geqq\beta, \tag{5.14}$$

であるから，前節までの結果が直接適用できる．一方，（5.12a）においては $H_1(t)$ は $H_1(t)=H(\beta)$，$t\geqq\beta$ であり，$[0,\infty)$ で可積分ではないから $r_0\leqq 0$ の場合にはこれまでの結果が適用できない．$B_1(t)$の漸近挙動をしらべるために以下をまず準備する[27]。

補題 5.1：再生方程式

$$B(t)=G(t)+\int_0^t \Psi(a)B(t-a)\,da, \tag{5.15}$$

において

(a) $G(t)\geqq 0,\ \Psi(a)\geqq 0,\ \int_0^\infty |G(t)|\,dt<\infty,\ \int_0^\infty |\Psi(a)|\,da<\infty,$ （5.16）

(b) $G(t)$，$\Psi(a)$ は有界な台をもつ．

(c) $\widehat{\Psi}(0)$は分解不能である．

と仮定する．$r_0=\max\{\mathrm{Re}\lambda;\det(I-\widehat{\Psi}(\lambda))=0\}$とすれば $r_0\in\Omega$ であり，以下が成り立つ．

(1) $r_0<0$ ならば

$$\int_0^\infty B(t)\,dt=(I-\widehat{\Psi}(0))^{-1}\widehat{G}(0). \tag{5.17}$$

(2) $r_0\geqq 0$ ならば

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \exp(-r_0u)B(u)\,du=\frac{\langle f_0,\widehat{G}(r_0)\rangle}{\langle f_0,-\Psi_1\psi_0\rangle}\psi_0. \tag{5.18}$$

ただし，${}^tf_0$，ψ_0 は $\widehat{\Psi}(r_0)$ の固有値 1 に属する左および右固有ベクトルである．

（証明）　$\exp(-st)$，$s\in R$を（5.15）の両辺に乗じて，$(0,T)$で積分すれば，（5.15）の解 $B(t)$は非負であるから

27）河田龍夫，『応用数学概論』，岩波書店，1952年，pp. 112-118参照．

$$\int_0^T \exp(-st)B(t)dt = \int_0^T \exp(-st)G(t)dt + \int_0^T \exp(-su)\Psi(u)\int_0^{T-u} \exp(-st)B(t)dt\,du$$

$$\leqq \int_0^\infty \exp(-st)G(t)dt + \int_0^\infty \exp(-su)\Psi(u)\int_0^T \exp(-st)B(t)dt\,du.$$

ここで仮定から，$\hat{G}(s)$，$\hat{\Psi}(s)$ がすべての $s\in R$ について存在する．また $s>r_0$ では $(I-\hat{\Psi}(s))$ は非逆転可能であったから

$$\int_0^T \exp(-st)B(t)dt \leqq (I-\hat{\Psi}(s))^{-1}\hat{G}(s). \tag{5.19}$$

（5.19）の左辺は T について単調増大で上に有界であるから $T\to\infty$ とした極限値をもつ。すなわち，$s>r_0$ において $\hat{B}(s)$ が存在して

$$\hat{B}(s) = (I-\hat{\Psi}(s))^{-1}\hat{G}(s),\ s>r_0. \tag{5.20}$$

そこでいま $r_0<0$ であれば

$$\lim_{s\to+0}\hat{B}(s) = \lim_{s\to+0}(I-\hat{\Psi}(s))^{-1}\hat{G}(s) = (I-\hat{\Psi}(0))^{-1}\hat{G}(0),$$

となり，（5.17）を得る。$r_0=0$ とすれば，$B(s)$ が $s>0$ で存在して $\det(I-\hat{\Psi}(0))=0$ であるから

$$\lim_{s\to+0}s\hat{B}(s) = \lim_{s\to+0}\frac{s}{\det(I-\hat{\Psi}(s))}\ \mathrm{adj}\ (I-\hat{\Psi}(s))\,\hat{G}(s)$$

$$=\left[\frac{d}{ds}\det(I-\hat{\Psi}(s))\big|_{s=0}\right]^{-1}\mathrm{adj}\ (I-\hat{\Psi}(0))\,\hat{G}(0)).$$

ここで r_0 は特性方程式 $\det(I-\hat{\Psi}(\lambda))=0$ の単根であったから $\frac{d}{ds}\det(I-\hat{\Psi}(s))\big|_{s=0}\neq 0$ であることに注意しよう．Hardy-Littlewood の Tauber 型定理[28]により，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t B(u)du = \lim_{s\to+0}s\hat{B}(s),$$

であるから，定理 3.3 の結果とあわせて（5.18）において $r_0=0$ としたものを得る．$r_0>0$ の場合は

$$B(t)\exp(-r_0t) = G(t)\exp(-r_0t) + \int_0^t \Psi(a)\exp(-r_0a)\cdot\exp(-r_0(t-a))B(t-a)da,$$

とおけば $r_0=0$ の場合に帰着される．□

上記の補題によって $B_1(t)$ の漸近挙動を調べよう．いま $\Psi(a)$ が微分可能と仮定すれば $B_1(t)$ は微分可能であり，

$$B_1'(t) = H_1'(t) + \int_0^t \Psi(a)B_1'(t-a)\,da, \tag{5.21}$$

28）Bellman-Cooke, 前掲書, p. 240 参照.

となる．ここで

$$H_1'(t)=M(t)\int_0^t L(t,\rho)m(\rho)d\rho \geqq 0,$$

$$\int_0^\infty H_1'(t)\,dt=H_1(\infty)<\infty.$$

したがって（5.21）に対して補題5.1が適用できる．すなわち，$r_0<0$ であれば

$$B_1(\infty)=\int_0^\infty B_1'(u)\,du=(I-\widehat{\Psi}(0))^{-1}H_1(\infty)=(I-\widehat{\Psi}(0))^{-1}H(\infty),$$

となるから，

$$\lim_{t\to\infty} B(t)=\lim_{t\to\infty} B_1(t)=(I-\widehat{\Psi}(0))^{-1}H(\infty), \tag{5.22}$$

を得る。次に，$r_0=0$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t B_1'(u)\,du=\lim_{t\to\infty}\frac{B_1(t)}{t}=\frac{\langle f_0,\ H(\infty)\rangle}{\langle f_0,\ -\Psi_1\psi_0\rangle}\psi_0,$$

である。$\lim_{t\to\infty} B_2(t)$ が有限値に収束するから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{B_1(t)}{t}=\frac{\langle f_0,\ H(\infty)\rangle}{\langle f_0,\ -\Psi_1\psi_0\rangle}\psi_0. \tag{5.23}$$

また $r_0>0$ の場合を考えよう．関数 $t\to\exp(-tx)[G(t)+H(t)]$ は $H(\infty)$ が有界だから，$x>0$ であるかぎり $L^1(-\infty,+\infty;C^n)$ の要素である。よって，$x>0$ において，補題3.7と同様の議論によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\Psi}(x+iy)\{\widehat{G}(x+iy)+\widehat{H}(x+iy)\}|\,dy<\infty,$$

となるから，定理3.10が適用できる。以上の考察から以下の定理が得られる．

定理 5.2：$\Psi(a)$ は微分可能で，$\widehat{\Psi}(0)$ は分解不能とする。また移住項 $m(a)$ は時間に独立であるとする．このとき再生方程式（5.8）の解 $B(t)$ について以下が成り立つ．

(1) $r_0<0$ であれば

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=(I-\widehat{\Psi}(0))^{-1}H(\infty), \tag{5.24}$$

ただし，

$$H(\infty)=\int_0^\beta M(a)\int_0^a L(a,\rho)\,m(\rho)\,d\rho\,da. \tag{5.25}$$

(2) $r_0=0$ であれば

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B(t)}{t}=\frac{\langle f_0,\ H(\infty)\rangle}{\langle f_0,\ -\Psi_1\psi_0\rangle}\psi_0=\frac{V_m(0)}{\langle f_0,\ -\Psi_1\psi_0\rangle}\psi_0. \tag{5.26}$$

ただし $V_m(0)$ は移住人口の総繁殖価であり，

$$V_m(0)=\int_0^\infty <f_0(a),\ m(a)>da\,, \tag{5.27}$$

によって与えられる．

(3) $r_0>0$ であれば

$$\lim_{t\to\infty}\ \exp\ (-r_0 t)\,B(t)=\frac{<f_0\,,\ (\widehat{G}(r_0)+\widehat{H}(r_0))>}{<f_0\,,\ -\Psi_1\,\psi_0>}\,\psi_0. \tag{6.28}$$

以下の命題は上記の定理と（5.6）からただちに得られる．

系 5.3：定理 5.2 の仮定のもとで以下が任意の有限年齢区間の上で一様に成り立つ．

(1) $r_0<0$ であれば

$$\lim_{t\to\infty}\ p\ (a\,,\ t\ )=L(a)\,(I-\widehat{\Psi}(0))^{-1}\,H(\infty)+\int_0^a L(a\,,\ \rho)\,m(\rho)\,d\rho. \tag{5.29}$$

(2) $r_0=0$ であれば

$$\lim_{t\to\infty}\ \frac{p\ (a\,,\ t\ )}{t}=\frac{V_m(0)}{<f_0\,,\ -\Psi_1\,\psi_0>}\ L(a)\,\psi_0\,. \tag{5.30}$$

(3) $r_0>0$ であれば

$$\lim_{t\to\infty}\exp\ (-r_0 t)\ p\ (a\,,t\,)=\frac{<f_0\,,\ (\widehat{G}(r_0)+\widehat{H}(r_0))>}{<f_0\,,\ -\Psi_1\,\psi_0>}\ \exp\ (-r_0 a)\,L(a)\,\psi_0. \tag{5.31}$$

系 5.3 より，$r_0<0$ であれば，一定の規模と構造をもつ人口の移住が続けば究極的には定常人口（stationary population）に到達することがわかる．ただし，この定常人口は外部からの移住によってその均衡をたもっているから，生命表理論における定常人口とは概念的には異なることに注意しなければならない．一方，$r_0=0$ であれば，人口規模は時間の線形関数であり，$r_0>0$ であれば指数関数的に増大するが，$r_0\geqq 0$ の場合は最終的な人口構造は移住のない場合と同じになることがわかる．

Mathematical Foundations of Multidimensional Stable Population Theory I : Classical Theory

Hisashi INABA

In this paper, we investigate the dynamics of multidimensional stable populations, which is described by the vector-type Lotka-Von Foerster system :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t}\right)p\,(a,t)=Q(a)\,p\,(a,t),$$

$$p\,(0,t)=\int_0^\infty M(a)\,p\,(a,t)\,da\,,$$

$$p\,(a,0)=\phi(a),$$

where $p\,(a,t)$ is the population vector, in which the i-th element $p_i\,(a,t)$ is the age-density function at time t of the i-th subpopulation, $Q\,(a)$ is a $n\times n$ transition rate matrix, $M\,(a)$ is a $n\times n$ fertility rate matrix and $\phi\,(a)$ is the initial distribution. Our main purpose is to give a rigorous proof to the strong ergodic theorem for the population process governed by the above system. Let $L\,(a)$ be the survival rate matrix defined by the solution of the equation

$$\frac{d}{da}L(a)=Q(a)\,L(a)\,,\ L(0)=I,$$

where I is the identity matrix. If the net reproduction rate matrix

$$\int_0^\infty \Psi(a)da\,,\ \Psi(a)\overset{\mathrm{def}}{=}M(a)\,L(a),$$

is indecomposable, then there exists a strictly dominant characteristic root r_0 such that

$$r_0>\max\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\Omega-\{r_0\}\},$$

where Ω is the set of characteristic roots defined by

$$\Omega\overset{\mathrm{def}}{=}\{\lambda\in C\ ;\ \det\,(I-\int_0^\infty\exp\,(-\lambda a)\Psi(a)da\,)=0\}.$$

Then we prove that the following holds uniformly for any age interval of the form $0\leqq a\leqq A<\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-r_0 t)\, p(a.t) = \frac{\langle f_0,\ \hat{G}(r_0)\rangle}{\langle f_0,\ -\Psi_1 \psi_0\rangle} \cdot \exp(-r_0 a)\, L(a)\, \psi_0 ,$$

$$\hat{G}(r_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^\infty \exp(-r_0 t)\, G(t)\, dt ,\quad -\Psi_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^\infty a \cdot \exp(-r_0 a)\, \Psi(a) da ,$$

where f_0 and ψ_0 are the left and right eigenvector, respectively associated with the eigenvalue one of the positive matrix $\int_0^\infty \exp(-r_0 a) \Psi(a) da$ and $\langle\ ,\ \rangle$ denotes the inner product of n-vectors.

Furthermore, we investigate an open population model which takes into account migration. This model is described by the Lotka-Von Foerster system with a time-independent migration term $m(a)$ as :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t}\right) p(a,t) = Q(a)\, p(a,t) + m(a) ,$$

$$p(0,t) = \int_0^\infty M(a)\, p(a,t)\, da ,$$

$$p(a,\ 0) = \phi(a),$$

where $m(a)$ is a positive n-vector, in which the i-th element $m_i(a)$ denotes the age-density function of migrants at i-th state. Then we can prove that if r_0 is less than zero, the population will become stationary ; if r_0 is equal to zero, the size of the population will increase linearly ; if r_0 is greater than zero, the increase will be exponential. But it can be seen that if $r_0 \geqq 0$, the ultimate age-distributions will be the same as in the stable population model.