調　査　研　究

多地域人口成長の離散時間モデルについて

稲　葉　　寿

I　はじめに

多地域的な人口成長のマトリックスモデル（離散時間モデル）の研究はRogers（1968）[1]，Feeney（1970）[2]，Le Bras（1971）[3]等によって開始され，Rogers（1975）[4]，Rogers and Willekens（1978）[5]において多地域生命表の理論にもとづいたパラメータ推定手法が提出されるにおよんで実用モデルへむけておおきく前進することとなった．しかしながら，こうした実用的な利用法の発達とは裏腹にその理論の要である一般化レスリー行列の形式的構造およびその安定分布の存在定理(強エルゴード定理）に関しては，これまで極めて漠然とした取り扱いがなされてきたにすぎない．

一般に多地域人口成長を記述する差分システムにおいては人口の年齢別地域別分布を表現するベクトル成分の配列方法の相違に従って二種類の行列，すなわち，一般化レスリー行列（the generalized Leslie matrix）と多地域成長行列（the multiregional matrix growth operator)があらわれる[6]．後者にたいして，Feeney，Le Bras は非負行列の理論に訴えることによって正値の安定ベクトルが存在するための十分条件を与えることができた[7]．しかし非負行列の一般論に頼るのみでは一般化レスリー行列の構造的特徴をあきらかにするには十分ではない．

本稿ではまず，一般化レスリー行列の固有値，固有ベクトルの構造を明らかにし，ついで一般スペクトル分解に訴えることで安定分布の存在条件を与える．最後に左側固有ベクトルを考察することで離散モデルにおける空間的繁殖価の概念を定式化することにする．

1）Andrei Rogers, *Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution*, University of California Press, 1968.

2）G. M. Feeney, "Stable age by region distribution", *Demography*, 6, 1970. pp. 341－348.

3）H. Le Bras, "Équilibre et Croissance de Population Soumises à des Migrations", *Theoretical Population Biology*, 2, 1971, pp. 100－121. G. M. Feeney, " Comment on a Proposition of H. Le Bras", *Theoretical Population Biology*, 2, 1971. pp. 122－123.

4）Andrei Rogers, *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley & Sons, 1975.

5）Frans Willekens and Andrei Rogers, *Spatial Population Analysis: Methods and Computer Programs*, International Institute for Applied System Analysis, RR－78－18, November 1978.

6）Rogers, 前掲 （注4)， pp. 122－123参照.

7）Rogers, 前掲（注4），p. 128，および Le Bras, 前掲（注3）参照.

II　多地域人口成長の離散時間モデル

この節では，多地域人口成長の離散時間モデルを定式化して一般化レスリー行列の持つ意味をあきらかにしておこう．

いま単性の人口集団を考え，それが r 個の地域に居住しているとしよう．第 j 地域（$1 \leqq j \leqq r$）に時刻 t（$t=0, 1, \cdots$）において居住する年齢階級 a（$a=1, 2, \cdots, k$）の人口数を $p_j(a, t)$ とあらわす．このとき r 次元の縦ベクトル $p(a, t)$ を

$$(2.1) \qquad p(a, t) = \begin{pmatrix} p_1(a, t) \\ p_2(a, t) \\ \vdots \\ p_r(a, t) \end{pmatrix}$$

によって定義する．さらに（rk）次元の縦ベクトル $p(t)$ を

$$(2.2) \qquad p(t) = \begin{pmatrix} p(1, t) \\ p(2, t) \\ \vdots \\ p(k, t) \end{pmatrix}$$

によって定義する．すなわち，$p(t)$ は r 次元ベクトル $p(a, t)$ を第 a 要素とするベクトルであり，時刻 t における年齢別地域別の人口分布を一意的に表現している．

つぎに $s_{ij}(a)$（$a=1,2,\cdots, k-1$）は年齢階級 a 歳で地域 j に居住していた者が $a+1$ 歳において地域 i に生残している率を示すとしよう．さらに $r \times r$ 行列 $S(a)$ を

$$(2.3) \qquad S(a) = \begin{pmatrix} s_{11}(a), & \cdots\cdots, & s_{1r}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ s_{r1}(a), & \cdots\cdots, & s_{rr}(a) \end{pmatrix}$$

によって定義すれば，ただちに次式を得る．

$$(2.4) \qquad p(a+1, t+1) = S(a)\, p(a, t), \quad 1 \leqq a \leqq k-1$$

また生残率行列 $L(a)$, $0 \leqq a \leqq k-1$ を $S(a)$ によって以下のように定義する．

$$(2.5) \qquad L(a) = S(a) \times S(a-1) \times \cdots \times S(1), \quad L(0) = I$$

ただし，ここでは I は $r \times r$ の単位行列である．以下では $L(k-1) \geq 0$,　$\det S(a) \neq 0$,　$1 \leqq a \leqq k-1$ と仮定する．ただしここで $x \leq y$ は $x \leqq y$ かつ $x \neq y$ を意味する．したがって特に $L^{-1}(a)$ が常に存在する．

さらに，$m_{ij}(a)$ は j 地域において年齢階級 a 歳の単位人口から生まれる個体のなかで，単位時間の後に i 地 域に生残しているものの平均数を示すとしよう．$r \times r$ 行列 $M(a)$ を

$$(2.6) \qquad M(a)=\begin{pmatrix} m_{11}(a), \cdots\cdots, m_{1r}(a) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ m_{r1}(a), \cdots\cdots, m_{rr}(a) \end{pmatrix}$$

によって定義すれば，ただちに次式を得る．

$$(2.7) \qquad p(1, t+1) = \sum_{a=1}^{k} M(a)\ p(a, t)$$

そこで以上の定義と仮定のもとで，$(rk) \times (rk)$ 行列 G を以下のように定義する．

$$(2.8) \qquad G=\begin{pmatrix} M(1), & M(2) & \cdots & \cdots & M(k) \\ S(1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & S(2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & S(k-1) & 0 \end{pmatrix}$$

G は一般化レスリー行列と呼ばれる[8]．(2.4)，(2.7) および (2.8) から次式を得る．

$$(2.9) \qquad p(t+1) = Gp(t)$$

(2.9) は分布ベクトル $p(t)$ の時間的変化を決定する差分システムであり，多地域投影過程(multiregional projection process)とよばれる[9]．(2.9) より，初期分布 $p(0)$ が与えられれば，t 時刻の人口分布は

$$(2.10) \qquad p(t) = G^{t} \cdot p(0)$$

によって決定される．従って $p(t)$ の挙動は，G の性質によって決定されることになる．G は非負行列であり，また物理的な意味から $p(t)$ も非負ベクトルであるが，以下では $p(t)$ として複素ベクトルもみとめ，G を複素係数体 C をもつ有限次元ベクトル空間の線形作用素とみなすことにする．

Ⅲ　一般化レスリー行列のスペクトル構造

ここでは一般化レスリー行列 G のスペクトル構造を調べる．

---

8) Feeney，前掲（注 2）参照．
9) Rogers，前掲（注 4），Chap. 5 参照．

最初に若干の定義をしておく．$\lambda \in C$ をパラメータとする行列 $\Psi(\lambda)$ を

$$(3.1)\qquad \Psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \lambda^{-j} M(j)\, L(j-1)$$

と定義して，これを特性行列とよぶ．とくに $\Psi(1)$ は純再生産行列（net reproduction rate matrix）とよばれる．また一般に行列 A の固有値の集合（スペクトル）を $\sigma(A)$ で表す．以上の準備のもとで以下の定理が示せる．

定理 3.1　G を一般化レスリー行列とする．このとき以下が成り立つ．

(1)　$\sigma(G)\setminus\{0\} = \{\lambda\ ;\lambda \in C,\ 1\in\sigma\ (\Psi(\lambda))\ \}$
$= \{\lambda\ ;\lambda \in C,\ \det\ (I-\Psi(\lambda)) = 0\}$
$= \{\lambda\ ;\lambda \in C,\ \lambda$ は $1/\det(I-\Psi(\lambda))$ の極である $\}$
$= \{\lambda\ ;\lambda \in C,\ \lambda$ は $(I-\Psi(\lambda))^{-1}$ の極である $\}$

(2)　$\lambda \in \sigma(G)\setminus\{0\}$ であれば

$$\dim \mathrm{N}(\lambda I - G) = \dim \mathrm{N}(I-\Psi(\lambda))$$

ただし $\mathrm{N}(A)$ は行列（線形作用素）A の核(kernel)を示す．

(3)　$\lambda \in \sigma(G)$ ならば $\bar{\lambda} \in \sigma(G)$ である．ただし $\bar{\lambda}$ は λ の共役複素数を表す．

(4)　$\lambda_0 \in \sigma(G)\setminus\{0\}$ とすれば，$(\lambda I - G)^{-1}$ の極としての λ_0 の位数は $(I-\Psi(\lambda))^{-1}$ の極としての λ_0 の位数をこえない．

（証明）　$\lambda \in \sigma(G)\setminus\{0\}$ としよう．このとき k 個の r－ベクトル $\psi(a)$, $1 \leqq a \leqq k$，を要素とする (rk)－ベクトル ψ が存在して

$$(3.2)\qquad G\psi = \lambda\psi,\ \psi = \begin{pmatrix} \psi(1) \\ \psi(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi(k) \end{pmatrix}$$

となる．これを要素ベクトルにわければ以下を得る．

$$(3.3)\qquad \sum_{a=1}^{k} M(a)\ \psi(a) = \lambda\psi(1)$$

$$(3.4)\qquad S(i)\,\psi(i) = \lambda\psi(i+1),\ 1 \leqq i \leqq k-1$$

これよりただちに，$\lambda \neq 0$ であれば次式を得る．

$$(3.5)\qquad \psi(a) = \lambda^{-a+1} L(a-1)\ \psi(1),\ a = 2, 3, \cdots, k$$

これを（3.3）に投入して

$$(3.6)\qquad \left(\sum_{a=1}^{k} M(a)\, L(a-1)\ \lambda^{-a+1}\right) \psi(1) = \lambda\psi(1)$$

これは $\Psi(\lambda)\psi(1) = \psi(1)$ を意味しているから $1 \in \sigma\ (\Psi(\lambda))$ となる．逆に $\lambda \neq 0$, $1 \in \sigma\ (\Psi(\lambda))$ であれば，$\Psi(\lambda)\phi = \phi$ となる r－ベクトル ϕ が存在するから，

(3.7) $\psi(1)=\phi, \psi(a)=\lambda^{-a+1}L(a-1)\psi(1),\ 2\leqq a\ \leqq k$

によって$\psi(a)$を定義すれば，(3.2) がなりたつ．すなわち，$\lambda\in\sigma(G)\setminus\{0\}$ である．従って，(1)は明らかである．また上記の議論から，$\psi\in\mathrm{N}(\lambda I-G)$であれば$\psi(1)\in\mathrm{N}(I-\Psi(\lambda))$ でありかつ

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi(1)\\ \lambda^{-1}L(1)\psi(1)\\ \vdots\\ \vdots\\ \lambda^{-k+1}L(k-1)\psi(1)\end{pmatrix}$$

とかけることから(2)が成り立つことがわかる．またGが非負行列であることから

$$\overline{\det(\lambda I-G)}=\det(\bar{\lambda}\bar{I}-G)$$

よって(3)を得る．(4)を示すために次の方程式を考える．

(3.8) $(\lambda I-G)\psi=\phi$

ただし，ψ，ϕ はそれぞれk個のr－ベクトル$\psi(a)$, $1\leqq a\ \leqq k$，$\phi(a)$, $1\leqq a\ \leqq k$を要素とする(rk)－ベクトルである．$\lambda\in\rho(G)=C\setminus\sigma(G)$であれば(3.8)は

(3.9) $\psi=(\lambda I-G)^{-1}\phi$

と解ける．すなわち，$\lambda\in\sigma(G)$はレゾルベント $(\lambda I-G)^{-1}$の特異点（極）に他ならない．(3.8)を要素ベクトルごとにかけば

(3.10) $\lambda\psi(1)-\sum_{a=1}^{k}M(a)\psi(a)=\phi(1)$

(3.11) $-S(j)\psi(j)+\lambda\psi(j+1)=\phi(j+1),\ 1\leqq j\ \leqq k-1$

(3.11) から次式を得る．

(3.12) $\psi(j)=\lambda^{-j+1}L(j-1)\psi(1)+\sum_{a=1}^{j-1}L(j-1)L^{-1}(a)\phi(a+1)\lambda^{-j+a}$,

$2\leqq j\leqq k$

(3.12) を (3.10) に投入して次式を得る．

(3.13) $\psi(1)=\lambda^{-1}(I-\Psi(\lambda))^{-1}$

$$\times[\phi(1)+\sum_{j=2}^{k}\sum_{a=1}^{j-1}M(j)L(j-1)\lambda^{-j+a}L^{-1}(a)\phi(a+1)]$$

従ってレゾルベント$(\lambda I-G)^{-1}$の特異点は$\lambda=0$ または $(I-\Psi(\lambda))^{-1}$ の特異点である．$(\lambda I-G)^{-1}$は高々極しかもたないから，$(\lambda I-G)^{-1}$もそうであり，λが極であれば明らかに(4)がなりたつ．
（証明おわり）

Gは非負行列であったからフロベニウス根 $\lambda_0\geqq 0$をもっている．このとき

$$\mathrm{spr}(G)=\max\{|\lambda|;\lambda\in\sigma(G)\}=\lambda_0$$

一方，$\Psi(\lambda)$，$\lambda>0$も非負行列だからパラメータλに依存するフロベニウス根$F(\lambda)$をもつ．両者の関係をのべるのが以下の定理である．

定理 3.2　Gを一般化レスリー行列とする．ある年齢階級iが存在して，$r\times r$行列$M(i)L(i-1)$が分解不能であると仮定する．$\Psi(\lambda)$，$\lambda>0$のフロベニウス根を$F(\lambda)$とすれば，特性方程式$F(\lambda)=1$，$\lambda>0$は唯一の正根$\lambda_0>0$をもち，λ_0はGのフロベニウス根である．さらに，(1)$F(1)>1$ならば$\lambda_0>1$，(2)$F(1)=1$ならば$\lambda_0=1$，(3)$F(1)<1$ならば$\lambda_0<1$となる．

（証明）　仮定から$\Psi(\lambda)$，$\lambda>0$は非負の分解不能行列である．従ってフロベニウス根$F(\lambda)>0$が存在する．$\Psi(\lambda)$の要素はλの減少関数であり，$\Psi(\lambda)$が分解不能であることから，$F(\lambda)$は狭義単調減少関数である．特性行列$\Psi(\lambda)$の（i，j）要素を$\psi_{ij}(\lambda)$としよう．このとき以下が成り立つ．

$$0<\min_j\sum_{i=1}^{r}\psi_{ij}(\lambda)\leqq F(\lambda)\leqq\max_j\sum_{i=1}^{r}\psi_{ij}(\lambda)$$

したがって，$\lim_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)=0$，$\lim_{\lambda\to+0}F(\lambda)=+\infty$となるから$F(\lambda)=1$は唯一の正根$\lambda_0>0$を持つ．このとき同時に(1)$F(1)>1$ならば$\lambda_0>1$，(2)$F(1)=1$ならば$\lambda_0=1$，(3)$F(1)<1$ならば$\lambda_0<1$となることは明らかである．また$F(\lambda_0)=1\in\sigma(\Psi(\lambda_0))$であるから，$\lambda_0\in\sigma(G)$である．そこで$\lambda_0$が$G$のフロベニウス根であることを示そう．$\psi_{ij}(\lambda)$の絶対値$|\psi_{ij}(\lambda)|$を第$(i,j)$要素とする非負行列を$\Psi^+(\lambda)$と表し，そのフロベニウス根を$F^+(\lambda)$で示す．このとき

$$\Psi^+(\lambda)\leqq\Psi(|\lambda|),\ F^+(\lambda)\leqq F(|\lambda|)$$

となることは容易に確かめられる．一方，$\Psi(\lambda)$のスペクトル半径を$\mathrm{spr}(\Psi(\lambda))$であらわせば以下が示される[10]．

$$\mathrm{spr}(\Psi(\lambda))\leqq F^+(\lambda)$$

$\lambda\in\sigma(G)\setminus\{0\}$とすれば前定理から$1\in\sigma(\Psi(\lambda))$であり，したがって，

$$F(\lambda_0)=1\leqq\mathrm{spr}(\Psi(\lambda))\leqq F^+(\lambda)\leqq F(|\lambda|)$$

$F(\lambda)$，$\lambda>0$は単調減少であったから$|\lambda|\leqq\lambda_0$を得る．すなわち，$\mathrm{spr}(G)=\lambda_0$であり，これは$\lambda_0$が$G$のフロベニウス根であることを意味している．（証明おわり）

上記の定理の仮定を強めることでGのフロベニウス根λ_0が厳密に支配的，すなわち，$\lambda_0>\max\{|\lambda|;\lambda\in\sigma(G),\ \lambda\neq\lambda_0\}$となることを示そう．

定理 3.3　Gを一般化レスリー行列とする．ある年齢階級iが存在して$M(i)L(i-1)$，$M(i+1)\times L(i)$が正値行列であるとする．このときGのフロベニウス根λ_0は厳密に支配的である．

（証明）　仮定のもとでは定理3.2より，Gのフロベニウス根λ_0は特性方程式$F(\lambda)=1$の唯一の正根として得られ，$\lambda_0=\mathrm{spr}(G)$であった．従って，$\theta\neq0$として$\lambda_0\exp(i\theta)\notin\sigma(G)$となることを示せばよい．仮定の下では$\arg\lambda\neq0$（ただし$\arg\lambda$は$\lambda$の偏角を示す）であれば

$$\Psi^+(\lambda)\lneq\Psi(|\lambda|)$$

となることが示される[11]．$\Psi(|\lambda|)$は分解不能であったから，この不等式から

10）二階堂副包，『経済のための線形数学』，培風館，1961年，p. 114参照．

11）$a>0,b>0,\lambda\in C\setminus\{0\}$について

$$\left|\frac{a}{\lambda^i}+\frac{b}{\lambda^{i+1}}\right|\leqq\frac{a}{|\lambda|^i}+\frac{b}{|\lambda|^{i+1}}$$であり，等号が成り立つのは$\lambda>0$の場合のみであることに注意する．

$$F^{+}(\lambda) < F(|\lambda|)$$

を得る[12]. したがって,

$$\mathrm{spr}\ (\Psi(\lambda)) \leqq F^{+}(\lambda) < F(|\lambda|)$$

となる. すなわち, もし $1 \in \sigma(\Psi(\lambda))$, $\arg\lambda \neq 0$ であれば,

$$F(\lambda_0) = 1 \leqq \mathrm{spr}\ (\Psi(\lambda)) < F(|\lambda|)$$

であり, Fが狭義単調減少なことから $|\lambda| < \lambda_0$ を得る. 一方,

$$\sigma(G) \setminus \{0\} = \{\lambda\ ;\ \lambda \in C,\ 1 \in \sigma(\Psi(\lambda))\}$$

であったから, $\lambda_0 \exp(i\theta)$, $\theta \neq 0$ はGの固有値ではありえない. よってλ_0 は厳密に支配的である.
(証明おわり)

ここで我々は線形作用素のスペクトル理論から若干の定義と結果を導入しておこう[13]. Tを複素バナッハ空間Xの閉作用素とし, λ_0をTのスペクトル$\sigma(T)$の孤立点とする. このときレゾルベント$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$は$\lambda_0$のまわりでローラン展開される.

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k} A_{k}$$

ここで

$$A_{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$$

であり, Γはλ_0をかこみ$\sigma(T)$のその他の点を内部およびその境界に含まない閉曲線である. A_{-1} はX上への射影 (projection) になる. λ_0 が $(\lambda I - T)^{-1}$の極であり, その位数がmであれば, λ_0 はTの固有値であり, 以下が成り立つ.

$$\mathrm{R}(A_{-1}) = \mathrm{N}((\lambda_0 I - T)^{m}),\ \mathrm{R}(I - A_{-1}) = \mathrm{R}((\lambda_0 I - T)^{m}),$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{N}((\lambda_0 I - T)^{m}) \oplus \mathrm{R}((\lambda_0 I - T)^{m})$$

ただし, $\mathrm{R}(A_{-1})$はA_{-1}の値域を示し, $\mathrm{N}(T)$はTの核を示す. $\mathrm{R}(A_{-1})$はλ_0の代数的固有空間とよばれ, その次元をλ_0の代数的重複度とよび, m_aであらわす. 一方, $\mathrm{N}(\lambda_0 I - T)$を幾何学的固有空間とよび, その次元は幾何学的重複度とよばれる. これをm_gであらわす. このときλ_0の位数mとm_a, m_gのあいだには, $m \leqq m_a$, $m_g \leqq m_a$という関係が成り立つ. もし$m_a = 1$であればλ_0は単純(simple)とよばれる. このとき必然的に$m = m_a = m_g = 1$であり, λ_0はレゾルベントの一位の極である. また, $\mathrm{R}(A_{-1}) = \mathrm{N}(\lambda_0 I - T) = \{rx\ ;\ r \in C\}$となる. 但し, xはλ_0に属するTの固有ベクトルであり, スカラー乗数を除いて一意的にきまる. もし$A_{-2} = 0$である場合, λ_0は半単純(semisimple)とよばれる. 当然, λ_0が単純であれば半単純であるが, 逆は真ではない.

12) 二階堂副包, 前掲 (注10), 『経済のための線形数学』, p. 87参照.
13) 閉作用素のスペクトル理論については関数解析の教科書を参照のこと. たとえば, T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, *2nd Edition*, Springer-Verlag, 1976, K. Yosida, *Functional Analysis*, *6th Edition*, Springer-Verlag, 1980. 特に数学的人口理論との関連においてはG. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, 1985. の記述がすぐれている.

以上の準備のもとで次の定理を示そう．

定理 3.4　Gを一般化レスリー行列とする．定理3.3の仮定がなりたつとすれば，Gのフロベニウス根λ_0は単純である．

（証明）　まずλ_0がGのレゾルベント$(\lambda I-G)^{-1}$の一位の極であることを示す．そのためには定理3.1から，λ_0が$(I-\Psi(\lambda))^{-1}$の一位の極であることを示せば十分である．$\Psi(\lambda)$はλ_0のまわりで解析的であるからテイラー展開できる．

$$\Psi(\lambda)=\sum_{n\geq 0}(\lambda-\lambda_0)^n K_n$$

このとき$K_0=\Psi(\lambda_0)$は仮定から正値行列であり，フロベニウス根として1をもつ．従って，その左右の固有ベクトルを$f(1)$，$\psi(1)$とすればこれらは正値ベクトルである．それゆえ，

$$K_1=\frac{d}{d\lambda}\Psi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}=-\sum_{j=1}^{k} j\lambda_0^{-j-1}M(j)L(j-1)<0$$

であり，$f(1)K_1\psi(1)<0$を得る．したがって，Schumitzky and Wenska（1975）の定理[14)]から，$\lambda=\lambda_0$が$(I-\Psi(\lambda))^{-1}$の一位の極であることがわかる．よって，$(\lambda I-G)^{-1}$の一位の極でもある．それゆえ，$\mathrm{R}(A_{-1})=\mathrm{N}(\lambda_0 I-G)$を得る．一方，$\dim\mathrm{N}(\lambda_0 I-G)=\dim\mathrm{N}(I-\Psi(\lambda_0))$であったから，$\Psi(\lambda_0)$が正値行列でフロベニウス根1をもつことから$\dim\mathrm{N}(I-\Psi(\lambda_0))=1$であり，従って$\dim\mathrm{R}(A_{-1})=1$，すなわち$\lambda=\lambda_0$は単純である．（証明おわり）

IV　分布ベクトルの漸近挙動：強エルゴード定理

ここでは一般化レスリー行列の安定分布が存在するための十分条件を定式化しよう．有限次元ベクトル空間Xの線形作用素Aの安定分布とは，任意のベクトル$\phi\in$Xにたいして以下が成り立つようなベクトル$\psi\in$Xのことである．すなわち，定数γが存在して

$$(4.1)\qquad \lim_{t\to\infty}\lambda^{-t}A^t\phi=\gamma\psi$$

がなりたつ．ここで$\lambda\in C$は初期分布ベクトルϕに依存しない．物理的な意味から$\lambda\in R$, $\psi\geq 0$となることを要求する場合が多い．多地域モデル（2.9）において，Gが非負の安定分布をもてば，年齢分布$p(t)$は時間とともにその初期分布からは独立になる．このような人口過程の性質を人口学では強エルゴード性とよんでいる[15)]．

一般スペクトル分解によって以下の定理を得る．

定理 4.1　Aを有限次元ベクトル空間Xの線形作用素とする．Aが厳密に支配的で半単純な固有値λ_0をもてば，以下がなりたつ．

$$(4.2)\qquad \lim_{t\to\infty}\lambda_0^{-t}A^t\phi=P_0\phi$$

ただしここでP_0 固有値λ_0に属する一般固有空間への射影（eigenprojection）である

（証明）　λ_h，$h=0,1,\cdots,s$をAの固有値とし，これらが$|\lambda_0|\geq|\lambda_1|\geq\cdots\geq|\lambda_s|$と順

---

14) A. Schumitzky and T. Wenska, "An operator residue theorem with applications to branching processes and renewal type integral equations". SIAM J. Math. Anal. Vol. 6, 1975, pp. 229－235.

15) 人口学におけるエルゴード諸定理に関しては以下を参照．
Joel E. Cohen, "Ergodic Theorems in Demography", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 1, Number 2, 1979, pp. 275－295.

序づけられているとしよう．m_hをλ_h の代数的重複度とする．λ_0 を厳密に支配的で半単純とする．すなわち，$\lambda_0 > \max\{\,|\lambda_h|\,;\,h\neq 0\}$，である．$A$に一般スペクトル分解を適用すれば，$A^t$ について以下の表示を得る[16]．

$$A^t\phi = \sum_{h=0}^{s}\left(\lambda_h^t P_h + \sum_{n=1}^{m_h-1}\binom{t}{n}\lambda_h^{t-n}D_h^n\right) \tag{4.3}$$

ここでP_h，D_h は以下のように定義される．

$$P_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(\lambda I - A)^{-1}\,d\lambda\ ,\ D_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(\lambda-\lambda_h)(\lambda I - A)^{-1}d\lambda$$

ここでΓ_hは複素平面上でλ_hをかこみ，その他の固有値を含まない閉曲線である．λ_0が半単純であるから，$D_0=0$である．よって（4.3）よりただちに以下を得る．

$$\|\lambda_0^{-t}A^t\phi - P_0\phi\| \leqq \sum_{h=1}^{s}\left(\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_0}\right|^t\|P_h\phi\| + \sum_{n=1}^{m_h-1}\binom{t}{n}\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_0}\right|^{t-n}\|D_h^n\phi\|\right) \to 0\ (t\to\infty)$$

ただし，$\|\cdot\|$ はXのノルムである．したがって，（4.2）を得る．（証明おわり）

上記の定理をGに適用して以下を得る．

定理 4.2（強エルゴード定理）　Gを一般化レスリー行列とし，定理 3.3 の仮定がみたされているとする．ψ_0をGのフロベニウス根λ_0に属する固有ベクトルとする．このときψ_0はGの非負の安定分布を与え，以下がなりたつ．

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_0^{-t}G^t\phi = \frac{\langle f_0, \phi\rangle}{\langle f_0, \psi_0\rangle}\psi_0 \tag{4.4}$$

ただし，$\langle x,\ y\rangle$はベクトルx，yの内積を示し，f_0はGのフロベニウス根λ_0に属する左側固有ベクトルである．

（証明）　$\psi(1)$，$f(1)$をそれぞれψ_0，f_0を構成する第一成分ベクトルとしよう．このとき$\psi(1)$は$\Psi(\lambda_0)$のフロベニウス根 1 に属する右固有ベクトルであったが，同様に$f(1)$が左固有ベクトルであることが容易にしめされる（補題 5.1 参照）．このとき$\Psi(\lambda_0)>0$であったから，$f(1)>0$，$\psi(1)>0$である．したがって，

$$\langle f_0, \psi_0\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle f(i),\ \psi(i)\rangle \geqq \langle f(1),\ \psi(1)\rangle > 0$$

を得る．つぎに

$$P_0\phi = \frac{\langle f_0,\ \phi\rangle}{\langle f_0, \psi_0\rangle}\psi_0 \tag{4.5}$$

となることを示そう．$H(\lambda)=(\lambda I - G)^{-1}$とおけば，$\lambda_0$はレゾルベント$H(\lambda)$の一位の極であった．したがって$H(\lambda)$は以下のようにローラン展開される．

$$H(\lambda) = \sum_{n=-1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n H_n$$

ただし，

$$H_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}H(\lambda)\,d\lambda,\ \ H_{-1} = P_0 \neq 0$$

16）笠原浩司，『線形代数と固有値問題』，現代数学社，1972年，または，Kato，前掲（注13）参照．

Γ は λ_0 を囲む閉曲線で，他の固有値をその内部および境界上に含まない．一方，恒等式

(4.6) $$\lambda I-G=(\lambda_0 I-G)+(\lambda-\lambda_0)I$$

(4.7) $$H(\lambda)(\lambda I-G)=(\lambda I-G)H(\lambda)=I$$

より，以下を得る．

(4.8) $$(\lambda_0 I-G)H_{-1}=H_{-1}(\lambda_0 I-G)=0$$

(4.9) $$H_{-1}+(\lambda_0 I-G)H_0=H_{-1}+H_0(\lambda_0 I-G)=I$$

これよりただちに

$$\mathrm{R}(H_{-1})=\mathrm{R}(P_0)=\mathrm{N}(\lambda_0 I-G)=\{\gamma\psi_0\,;\,\gamma\in C\}$$

となる．したがって各 ϕ についてある $\gamma\in C$ が存在して $P_0\phi=\gamma\psi_0$ とかける．一方，（4.9）から

$$P_0\phi=H_{-1}\phi=\phi-(\lambda_0 I-G)H_0\phi$$

それゆえ，左から f_0 をかければ，

$$\begin{aligned}\langle f_0,\ P_0\phi\rangle&=\langle f_0,\ \gamma\psi_0\rangle=\gamma\langle f_0,\ \psi_0\rangle\\&=\langle f_0,\ \phi-(\lambda_0 I-G)H_0\phi\rangle=\langle f_0,\ \phi\rangle\end{aligned}$$

よって以下を得る．

$$P_0\phi=\gamma\psi_0=\frac{\langle f_0,\ \phi\rangle}{\langle f_0,\ \psi_0\rangle}\psi_0$$

定理4.1からただちに（4.4）を得る．（証明おわり）

$\lambda_0\geqq 0$ を G のフロベニウス根とし，ψ_0 をそれに属する非負の固有ベクトルとする．$p(0)=\psi_0$ とすれば

$$p(t)=G^t\psi_0=\lambda_0^t\psi_0$$

従って，もし人口分布がひとたび ψ_0 に一致すれば，人口過程（2.9）は成長率 λ_0 で斉一成長をおこなう．また強エルゴード定理が成り立つ場合には，どのような初期分布から出発しても分布ベクトルは ψ_0 に漸近的に比例するようになる．すなわち，スカラー乗数を除いて一意的な ψ_0 で示される人口構造は安定であることになる．いま $e=(1,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,\ 1)$ を，その成分がすべて1であるような (rk) −横ベクトルとすれば，人口分布ベクトル $p(t)$ は

$$p(t)=\langle e,\ p(t)\rangle\cdot\langle e,\ p(t)\rangle^{-1}p(t)$$

と分解される．ここで $\langle e,\ p(t)\rangle$ は総人口数を示し，$\langle e,\ p(t)\rangle^{-1}p(t)$ は人口の年齢別地域別構成比率を成分とするベクトルである．安定分布についてこの分解をおこなえば，

$$\frac{\langle f_0,\ \phi\rangle}{\langle f_0,\ \psi_0\rangle}\psi_0=\frac{\langle f_0,\ \phi\rangle}{\langle f_0,\ \psi_0\rangle}\langle e,\psi_0\rangle\cdot\langle e,\ \psi_0\rangle^{-1}\psi_0$$

このとき $\langle f_0,\phi\rangle\langle e,\psi_0\rangle/\langle f_0,\psi_0\rangle$ は安定同値人口（stable equivalent）とよばれる．

$$G^t\phi\sim\lambda_0^t\frac{\langle f_0,\ \phi\rangle\langle e,\ \psi_0\rangle}{\langle f_0,\ \psi_0\rangle}\langle e,\ \psi_0\rangle^{-1}\psi_0=G^t\left[\frac{\langle f_0,\ \phi\rangle\langle e,\ \psi_0\rangle}{\langle f_0,\ \psi_0\rangle}\langle e,\ \psi_0\rangle^{-1}\psi_0\right.$$

であるから，強エルゴード的人口過程においては，任意の初期分布 ϕ から出発する人口 $p(t)$ は十分時間がたてば，安定同値人口を総人口として，人口構成 $\langle e,\psi_0\rangle^{-1}\psi_0$ を有する人口を初期分布とする

斉一成長軌道に漸近することになる．

定理4.2によって我々はGの安定分布が存在する十分条件を得たが，さらにもしGが複素固有値をもてば，過渡状態において振動がひきおこされることが以下のようにしてわかる．いま $\mathrm{Im}\ \lambda_h \neq 0$, $\lambda_h \in \sigma(G)$であれば$\overline{\lambda_h} \in \sigma(G)$でもある．いま$\overline{\lambda_h} = \lambda_k$ ($h \neq k$) とすれば

$$\overline{P_h \phi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\Gamma_h}} (\lambda I - G)^{-1} \phi d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} (\lambda I - G)^{-1} \phi d\lambda = P_k \phi$$

となる．ただし$\overline{\Gamma_h}$はΓ_hの鏡像であり，$\overline{\Gamma_h} = \Gamma_k$である．それゆえ，$A^t$の展開においては以下のような振動項が存在する．

$$\lambda_h^t P_h \phi + \lambda_k^t P_k \phi = \lambda_h^t P_h \phi + \overline{\lambda_h^t P_h \phi} = 2|\lambda_h|^t \begin{pmatrix} |(P_h\phi)_1| \cos(t\theta_h + \alpha_1) \\ \vdots \\ |(P_h\phi)_{rk}| \cos(t\theta_h + \alpha_{rk}) \end{pmatrix}$$

ただし，$\theta_h = \arg(\lambda_h)$であり，$(P_h\phi)_j$はベクトル$P_h\phi$の第$j$成分であり，$\alpha_j = (\mathrm{Im}(P_h\phi)_j / \mathrm{Re}(P_h\phi)_j)$である．

V　空間的繁殖価（the spatial reproductive value）

ここでは一般化レスリー行列Gの左側固有ベクトルの構造を考える．まず，定理4.2で用いた以下の事実を示しておこう．

補題5.1　$\lambda_0 \neq 0$をGのフロベニウス根とし，f_0をλ_0に属する左側固有ベクトルとする．f_0はk個のr次元横ベクトル$f(a)$, $1 \leq a \leq k$に細胞分割されているとする．すなわち，$f_0 = (f(1), f(2), \cdots, f(k))$. このとき$f(1)$は$\Psi(\lambda_0)$の固有値1に属する左固有ベクトルである．

（証明）　$f(1) = f(1)\Psi(\lambda_0)$となることを示せばよい．$\lambda_0 f_0 = f_0 G$をその要素ベクトルごとにかけば，

$$(5.1) \qquad \begin{cases} f(1)M(a) + f(a+1)S(a) = \lambda_0 f(a), & a = 1, 2, \cdots, k-1 \\ f(1)M(k) = \lambda_0 f(k) \end{cases}$$

これよりただちに

$$f(1)\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda^{-j} M(j) L(j-1)\right) = f(1)$$

を得る．（証明おわり）

ここで多地域モデル（2.8）において定理3.2の仮定がなりたっているとしよう．このときGのフロベニウス根をλ_0とすれば$\Psi(\lambda_0)$はフロベニウス根1をもち，その左固有ベクトル$f(1)$はスカラー乗数を除いて一意的にさだまる．このとき年齢階級aの人口の空間的繁殖価（the spatial reproductive value）[17]を次のように定義する．

$$(5.2) \qquad f(a) = f(1)\left[\sum_{j=a}^{k} \lambda_0^{-j+a-1} M(j) L(j-1)\right] L^{-1}(a-1)$$

17）繁殖価の概念およびその応用については以下を参照．
Nathan Keyfitz, *Applied Mathematical Demography, 2nd Edition*, Springer-Verlag 1985, Chap. 6, A. Rogers and F. Willekens, "The spatial reproductive value and the spatial momentum of zero population growth" *Environment and Planning A*, 10, 1978, pp. 503−518.

このとき $f(a)$が漸化式（5.1）をみたすことはただちにわかるから，横ベクトル$(f(1), f(2), \cdots, f(k))$ はGの固有値 λ_0 に属する左固有ベクトルとなる．$f(a)$ は年齢 a の人口が a 歳以後に生むと期待される子孫の数を成長率 λ_0 で割りびいたものであり，年齢 a の人口が安定成長の下で子孫の繁殖に関して有する貢献度をはかる相対的な尺度であると考えられている．さらに，人口分布 $p(t)$があたえられたとき，内積$\langle f_0, p(t)\rangle = V(t)$を総繁殖価（total reproductive value）とよぶ．$p(t)$が（2.10）に従えば$V(t)$は成長率 λ_0 で幾何級数的に増大する．実際，

$$V(t)=\langle f_0, p(t)\rangle=\langle f_0, G^t p(0)\rangle=\langle f_0 G^t, p(0)\rangle$$
$$=\lambda_0^t\langle f_0, p(0)\rangle=\lambda_0^t V(0)$$

この事実は人口遺伝学においてFisherの原理とよばれている[18]．とくに，Gの安定分布について$\langle f_0, \psi_0\rangle=1$ となるように規格化しておけば以下を得る．

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_0^{-t} G\cdot p(0)=V(0)\psi_0$$

空間的繁殖価を用いれば，安定人口分布の係数としてこれまでとは別の形態が得られる。

定理 5.2　Gを一般化レスリー行列とし，定理 3.3 の仮定が成り立っているものとしよう．Gのフロベニウス根λ_0に属する左右の固有ベクトルをf_0，ψ_0 とし，$f(1)$，$\psi(1)$を各々f_0，ψ_0 の最初の r 個の成分からなる r-ベクトルとする．このとき ψ_0 は安定分布であり，以下が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_0^{-t}Gp(0)=\frac{\langle f_0, p(0)\rangle}{\langle f_0, \psi_0\rangle}\psi_0=\frac{V(0)}{f(1)\left[-\lambda_0\dfrac{d}{d\lambda}\Psi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right]\psi(1)}\psi_0$$

（証明）　仮定および定理 4.2 より

$$\langle f_0, \psi_0\rangle=f(1)\left[-\lambda_0\frac{d}{d\lambda}\Psi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right]\psi(1)$$

がなりたつことを示せば十分である．

$$\langle f_0, \psi_0\rangle=\sum_{a=1}^{k}\langle f(a), \psi(a)\rangle$$

である．ここで $f(a)$は空間的繁殖価（5.2）によって与えられる．一方，$\psi(a)=\lambda_0^{-a+1}L(a-1)\psi(1)$ であったから

$$\langle f(a), \psi(a)\rangle=f(1)\left[\sum_{j=a}^{k}\lambda_0^{-j}M(j)L(j-1)\right]\psi(1)$$

したがって，

18) J. F. Crow and M. Kimura, *An Introduction to Population Genetics Theory*, Harper and Row, 1970, p. 22 参照.

$$\langle f_0, \psi_0 \rangle = \sum_{a=1}^{k} f(1) \Big[\sum_{j=a}^{k} \lambda_0^{-j} M(j)\, L(j-1) \Big] \psi(1)$$

$$= f(1) \Big[\sum_{a=1}^{k} \sum_{j=a}^{k} \lambda_0^{-j} M(j)\, L(j-1) \Big] \psi(1)$$

$$= f(1) \Big[\sum_{j=1}^{k} \sum_{a=1}^{j} \lambda_0^{-j} M(j)\, L(j-1) \Big] \psi(1)$$

$$= f(1) \Big[\sum_{j=1}^{k} j\lambda_0^{-j} M(j)\, L(j-1) \Big] \psi(1)$$

を得る。よってただちに，

$$\langle f_0, \psi_0 \rangle = f(1) \Big[-\lambda_0 \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \Big] \psi(1)$$

となることがわかる．（証明おわり）

VI 結　　語

すでにみてきたように，一般化レスリー行列Gが安定分布をもつためにはGのフロベニウス根が厳密に支配的で単純であることが十分であった．またそのためには定理3.3の条件がひとつの十分条件を与える．この結果は通常のレスリー行列に関する結果[19]からのアナロジーによって，Rogers(1975)において予想されていたことである[20]．しかし,これまで人口学における多次元モデルに関しては，J.Cohen，J. M. Hoem 等の例外を除けば，安易に一次元の古典的結果からのアナロジーで多次元モデルの性質を論ずる demographer が大部分であり，数値的結果を得ることのみが先行して，モデルの形式的構造を厳密に論ずる態度に欠けていたことは指摘しておく必要があろう．数学的モデルは，それが素朴な段階をすぎるやいなや，もはや自明なものではなく，それ自体十分に検討に値するものになってくる．厳密な証明過程は単に審美的理由で要求されているのではなく，正確な結論を導くために必要とされていることを強調しておきたいと思う．これらのことはRogers（1975）において展開されている連続時間の多地域モデルに関してもとりわけ妥当することである．しかしこれについてはまた稿をあらためて論ずることとしたい．

19）J. H. Pollard, *Mathematical models for the growth of human populations*, Cambridge University Press, 1973, Chap. 4 参照.

20）Rogers，前掲（注4），sec. 5.5 参照.

On the Discrete Model of Multiregional Demographic Growth

Hisashi INABA

In this paper we consider a one-sex population divided into r regions. Let k be the number of age classes and let $p_j(a,t)(j=1,2,\cdots,r:a=1,2,\cdots,k)$ denote the number of individuals at time $t(t=1,2,\cdots)$ in region j in age class a. We define a r-column vector $p(a,t)$ as

$$p(a,t) = (p_1(a,t),\cdots\cdots,p_r(a,t))^\tau.$$

where τ denotes the transpose of the vector. Further, we define the (rk)-column vector $p(t)$ as

$$p(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p(1,t) \\ p(2,t) \\ \vdots \\ p(k,t) \end{pmatrix},$$

which denotes the age-by-region distribntion of population at time t. Let $s_{ij}(a)(a=1,2,\cdots,k-1)$ denote the proportion of individuals in age class a and region j at time t who are alive in age class $a+1$ and region i at time $t+1$. Let $S(a)$ be the $r\times r$ matrix, in which the (i,j) element is $s_{ij}(a)$. Then we have

$$p(a+1,t+1) = S(a)\ p(a,t).$$

The survival rate matrices $L(a)(a=0,1,\cdots,k-1)$ is defined as

$$L(a) = S(a)\times S(a-1)\times\cdots\cdots\times S(1) \text{ for } a=1,\cdots,k-1, L(0) = I,$$

where I denotes the $r\times r$ identity matrix. We assume that $L(k-1)\gneq 0$ where $x\gneq y$ means $x\geqq y$, $x\neq y$.

Next let $m_{ij}(a)$ be the average number of individuals born from t to $t+1$, per individual in region j and age class a at time t, who are alive in region i and age class one at $t+1$. Let $M(a)$ be the $r\times r$ matrix, in which the (i,j) element is $m_{ij}(a)$. Then the following holds :

$$p(1,t+1) = \sum_{a=1}^{k} M(a)\ p(a,\ t).$$

The generalized Leslie matrix is defined as follows :

$$
G \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} M(1), & M(2), & \cdots\cdots, & & M(k) \\ S(1), & 0, & \cdots\cdots, & & 0 \\ 0, & S(2), & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0, & \cdots, & 0, & S(k-1), & 0 \end{pmatrix} .
$$

Using the above definitions, we can formulate the discrete, one-sex model of multiregional demographic growth as

$$
p(t+1) = G \cdot p(t).
$$

Hence

$$
p(t) = G^t \cdot p(0), \quad t=0,1,2,\cdots,
$$

where $p(0)$ denotes the initial population distribution.

Our main result is the following proposition.

Proposition Assume that at least two consecutive $M(i)L(i-1)$ are positive matrices. Then the following hold :

(1) G has a strictly dominant, simple eigenvalue $\lambda_0 > 0$.

(2) Let $\Psi(\lambda)$ be the characteristic matrix defined as

$$
\Psi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k} \lambda^{-j} M(j) L(j-1).
$$

Then $\Psi(\lambda_0)$ has the Frobenius root one.

(3) Let f_0, ψ_0 be the left and right eigenvectors of G associated with λ_0 and let $f(1)$, $\psi(1)$ be the left and right eigenvectors of $\Psi(\lambda_0)$ associated with the Frobenius root one. Then ψ_0 is a nonnegative stable distribution of G, and the following holds :

$$
\lim_{t \to \infty} \lambda_0^{-t} G^t \cdot p(0) = \frac{\langle f_0, p(0) \rangle}{\langle f_0, \psi_0 \rangle} \psi_0 = \frac{V(0)}{f(1)\left[-\lambda_0 \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda_0)\right] \psi(1)} \psi_0,
$$

where $V(0) = \langle f_0, p(0) \rangle$ is the total reproductive value of the initial population.

From the above proposition, we know that

$$
p(t) \sim \lambda_0^t \frac{\langle f_0, p(0) \rangle}{\langle f_0, \psi_0 \rangle} \psi_0 \quad (t \to \infty).
$$

Therefore, the age-by-region distribution $p(t)$ is asympotically independent of the initial distribution except scalar multipliers. In other words, under the assumption of this proposition, the strong ergodic property holds for this demographic process.