

資料

安定人口の計算

中川友長

年齢別出生率及同死亡率が一定する場合には、人口の年齢構成状態も亦一定するに至る。此の事は F. R. Sharpe 及 A. J. Lotka が夙に證明せる所也 (A Problem in Age-Distribution, Philosophical Magazine, Vol. XX, Sixth Series, April 1911) 之に依れば此の一定せる年齢構成状態は、 $C(a)$ を a 歳の男又は女人口割合、 b を一定年齢構成状態下に於ける總出生率、 r を同自然増加率、 $p^{(a)}$ を男又は女の出生後 a 歳迄残存すべき率とすれば、男女各人口毎に

$$C(a) = be^{-ra} p^{(a)} \dots \dots \dots (1)$$

と與へられる。

此の如く一定状態に達せる人口を安定人口 (Stable Population) と名付ける。蓋し増加率及年齢構成状態が變動することなく、安定せる人口の意である。

安定人口に於ける各年齢人口の割合は、上記の如く $C(a)$ なる値に一定するのであるが、更に之は次の如き比に一定することが證明される。

$$P_0 : P_1 : P_2 : \dots : P_w = b : \frac{1}{1+r} : \frac{1}{(1+r)^2} : \dots : \frac{1}{(1+r)^w} \dots \dots (2)$$

P_i は或時點に於ける安定人口の i 歳人口、 w は最高年齢、 1 は前提せる

一定なる年齢別死亡率下に於ける生命表の i 歳生存數、 r は前記 r と同じ増加率である。

此の證明は次の如くにして行へる。

P_x を以て i 時點に於ける x 歳安定人口とすれば

$$P_x^{(i+1)} = (1+r)P_x^{(i)}$$

然るに此の $(i+1)$ 時點に於ける x 歳安定人口は、 (i) 時點に於ける x 歳安定人口より生残し來るものであるから

$$P_x^{(i+1)} = P_{x-1}^{(i)} \frac{1_x}{1+r}$$

此の二式より

$$P_{x-1}^{(i)} : P_x^{(i)} = 1_{x-1} : \frac{1_x}{1+r} \\ = \frac{1_{x-1}}{(1+r)^{x-1}} : \frac{1_x}{(1+r)^x}$$

此の關係を x の各値即ち各年齢に付て求め、之を總合すれば、(2) 式を得ること明である。

今、自然増加率が零なる特定の場合を考へてみると、此の場合に於ける安定人口の年齢構成状態は、(2) 式の r を零と置いたもの即ち

$$P_0 : P_1 : P_2 : \dots : P_w = b : 1 : 1 : 1 : \dots : 1_x$$

となり。其の各歳人口割合は生命表に於ける各歳生存數割合と同一のものとなる。此の状態に於ける安定人口を特に靜止人口 (Stationary Population) と名付ける。蓋し此の人口に於ては自然増加率が零で、人口の増減無く、靜止せる所をうたつたものである。併し此の靜止人口は安定人口の特殊場合であつて、安定人口一般は零に非らざる r の一定の値を持ち、之に應じて増加又は減少する。但し此の増加又は減少は、安定人口の性質上、各年

齡人口を通じ、一樣に行はれる。

靜止人口に於ては、其の年齢構成状態は、上述の如く、生命表の生存數が現はす年齢構成状態に等しく、而して毎年同數の出生がある一方に於て、之と同數の死亡が一定の割合を以て、各年齢に分布して生ずるから、同人口に於て計算せらるゝ總死亡率 Q_s は

$$Q_s = \frac{K(d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_w)}{K(l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_w)} = \frac{d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_w}{l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_w}$$

となる。但し K は $\sum_{i=0}^w M_i^x = K \sum_{i=0}^w M_i^y$ であつて、 d_i は生命表に於ける i 歳死亡數である。

此の Q_s の分子である生命表の各歳死亡數の合計は l_0 に等しいから

$$Q_s = \frac{1}{\frac{l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_w}{l_0}} = \frac{1}{E_0}$$

であつて E_0 、即ち零歳の平均餘命の逆數値に等しい。併し此の關係は靜止人口に特有の關係であつて、安定人口一般に於ては存在しない。Bortkiewiczの研究に依れば、増加する安定人口即ち r が零より大である安定人口に於て、死力が年齢の上昇と共に次第に増加する場合には、其の總死亡率は零歳の平均餘命の逆數値より小、死力が年齢の上昇と共に次第に減少する場合には、其の總死亡率は零歳の平均餘命の逆數値より大であるが、死力が年齢の上昇と共に一旦減少し、然る後増加する場合（之が實際の場合である）には、簡單なる一定の關係を成立せしめ得ないのである。（L. von Bortkiewicz: Die Sterbeziffern und der Frauenüberschuss in der stationären und der Progressiven Bevölkerung, Bulletin de l'Institut International de Statistique, Tome X I X — 1re Livraison 参照）

安定人口の年齢構成を計算するには、先づ一定と置かるゝ年齢別出生率

安定人口の計算

（安定男人口の場合には、年齢別男子の男兒出生率、同女人口の場合には年齢別女子の女兒出生率）及出生後各年齢に達すべき殘存率（安定男人口の場合には男子の各年齢に達すべき殘存率、同女人口の場合には女子の同率）に依り次の諸値を算出するを要する。

$$R_n = \int_0^w a^n p(a) m(a) da, n = 0, 1, 2.$$

$$\alpha = \frac{R_1}{R_0}, \beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0}$$

但し $p(a)$ は出生後 a 歳に達すべき殘存率、 $m(a)$ は a 歳の出生率を示す。

上記の R_0 、 α 及 β の値に依つて

$$4\beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0$$

を解して r の値を求めれば、之が上掲(1)式の r の値となる。此の如くにして r の値が求められることよふことは、安定人口に於て(1)式と共に成立つことが證明せられる(註)所の下式

$$\int_0^{\infty} e^{-r a} p(a) m(a) da = 1$$

から導かれる。（L. I. Dublin and A. Lotka: On the True Rate of Natural Increase, Journal of the American Statistical Association, Sept. 1925. 又は R. R. Kuezyński: Fertility and Reproduction, 1932, pp. 54—60 参照）

(註) 此の證明は次の如くにして行ふことが出来る。或一年間の出生總數を B 、人口總數を N とすれば

$$B = N \int_0^{\infty} c(a) m(a) da$$

前掲(1)式に依れば $c(a) = h e^{-r a} p(a)$ であるから上式が

$$B = N h \int_0^{\infty} e^{-r a} p(a) m(a) da$$

然るに $N h = B$ であるから上式右邊の積分値は一でなければならぬ。

次に上記の計算結果より得たる r の値及残存率を用ひて下記の諸値を計算する。

$$L_n = \int_0^w a^n P(a) da, \quad n=0, 1, 2, 3,$$

$$u = \frac{L_1}{L_0} \quad v = u^2 - \frac{L_2}{L_0}, \quad w = u^3 - \frac{3}{2}u \frac{L_2}{L_0} + \frac{1}{2} \frac{L_3}{L_0}$$

$$C = \int A' dt = w + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^3$$

此の L_0 及 C の値に依つて $\frac{e^b}{L_0}$ を計算すれば之が上掲(1)式の b の値となる。此の如くにして b 値が求められるといふことは、安定人口に於て成立することが證明せらるる(註)所の下式

$$\frac{1}{b} = \int_0^{\infty} e^{-rt} p(a) da$$

から導かれる。(此の點に付ては前掲ダブリン及ロトカの論文又はクツチンスキイの著書参照)

(註) Sharpe and Lotka: A Problem in Age-Distribution. 又は A. J. Lotka: Studies on the Mode of Growth of Material Aggregates, American Journal of Science, 1907 vol. 24 参照。

b 及 r の二値を得れば、(1)式に依つて、直に安定人口の年齢構成状態を求むることが出来る。上述せる所から明なる如く、此の年齢構成は男人口及女人口各別に計算せられ、従つて b 及 r の二値は二通り計算される、即ち男人口の自然増加率及出生率と女人口の自然増加率及出生率である。此の場合に於て、例へば男人口の自然増加率と女人口の自然増加率とを加へれば總人口の自然増加率が得られると誤解してはならない。反つて前二値は夫々後値に代用し得る程、非常に似たものとなる。勿論厳密に論ずれば、前二値の或加重平均値が後値に一致するのであるが、實用的には男人口

口女人口何れかの場合に付て求めた r 値及 b 値を以て、總人口の r 値及 b 値を推すことが出来る。

扱、安定人口は、上述の如き性質のものであるから、此の人口の年齢構成の状態は、過去の出生率又は死亡率の變動影響から脱却したものと成つて居る。従つて之に付て人口の總出生率及同死亡率を測れば、それは上述の如き變動影響から離れて、想定された年齢別出生率及死亡率の、いはば自由な作用下に於ける其の値となる譯である。此の點に安定人口といふものを考へて、而して之に付て總出生率、同死亡率及同自然増加率を測る基本的な理由が在る。

今我國内地の現況に付て、此の安定人口を計算し、其の總出生率、同死亡率及同自然増加率を調べてみれば次の如くである。但し此の計算は女人口を對象として行ふこととし、而して計算に必要な出生後各年齢迄残存する率 $P(a)$ の値は、最近の發表に係る第六回生命表の數字に依り、又女子の年齢別女兒出生率は昭和十二年の狀況に依る値即ち昭和十年國勢調査結果に依る年齢別女子人口及昭和十年以降年齢別女子死亡統計を用ひて推計せる昭和十二年一五歳乃至四九歳の年齢別女子中間人口を以て、昭和十二年母の年齢別女兒出生數(註)を除したる値に依つたのである。

(註) 母の年齢別出生統計には、母の年齢一五歳未満のもの、同五〇歳以上のものが現はれて居る。又嫡出子、私生子たる女兒の外に、猶、庶子たる女兒があるが、之に付ては母の年齢を詳にし得ない。其處で上記年齢級の母が生んだとなつて居る女兒數及庶子として生れた女兒數を年齢一五歳乃至四九歳の各年齢の母の生んだ嫡出子及私生子數に按分附加し、之を母の年齢別女兒出生總數と推定したのである。

此の母の年齢別女兒出生率は、次の如くである。

母の年齢	女兒出生率	母の年齢	女兒出生率
一五歳	0.00047	三三歳	0.09911
一六歳	0.00210	三四歳	0.09282
一七歳	0.00545	三五歳	0.08729
一八歳	0.01376	三六歳	0.08051
一九歳	0.02701	三七歳	0.07413
二〇歳	0.04858	三八歳	0.06890
二一歳	0.06912	三九歳	0.05849
二二歳	0.08934	四〇歳	0.05121
二三歳	0.10514	四一歳	0.04157
二四歳	0.11422	四二歳	0.03049
二五歳	0.11858	四三歳	0.02126
二六歳	0.12242	四四歳	0.01418
二七歳	0.12050	四五歳	0.00795
二八歳	0.11465	四六歳	0.00462
二九歳	0.11531	四七歳	0.00278
三〇歳	0.10735	四八歳	0.00202
三一歳	0.10743	四九歳	0.00161
三二歳	0.09990		

此の母の年齢別女兒出生率と第六回生命表に依る出生後女子が各年齢迄
 残存する率とに依つて、母の年齢別出生率及女子の残存率が右の如き値に
 固定する場合に現はるべき安定人口の年齢構成を知る爲に必要な前記諸
 値を計算すると次の値が得られる。

$R_0 = 1.52035, R_1 = 45.09379, R_2 = 1397.7475$
 $u = 29.66, p = -39.6405$
 従つて $r = 14.38$
 $T_0 = 49.15, L_1 = 1678, L_2 = 80761, L_3 = 4529271$

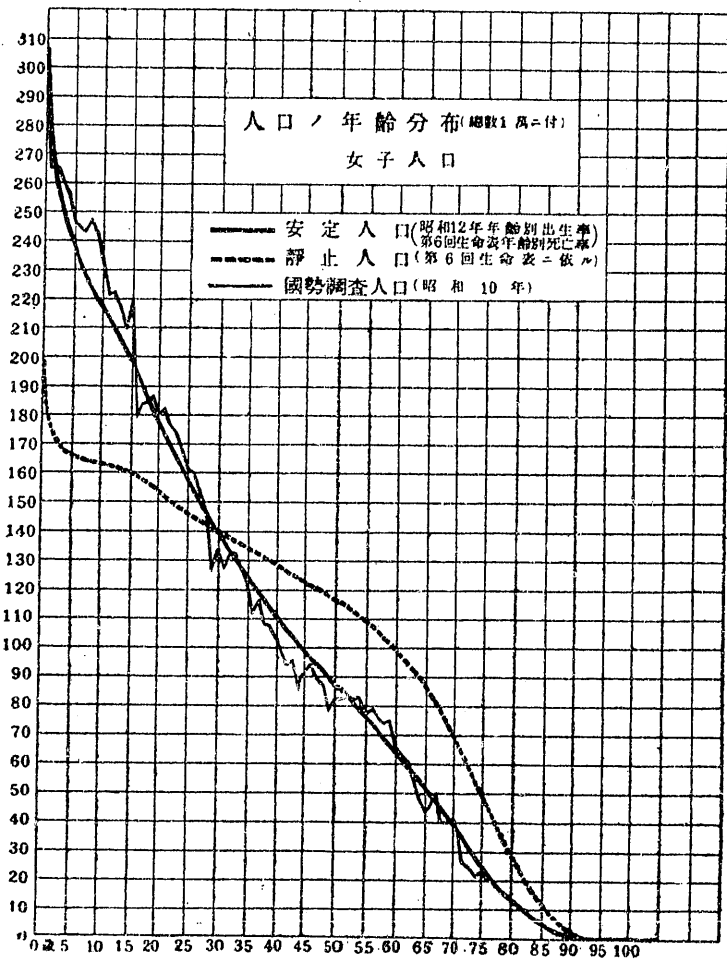
安定人口の計算

$\mu = 34.14, v = -477.61, w = 1721.81$
 $c = 0.44326$
 従つて $b = 31.69$
 此の r 値及 b 値に依つて、安定人口に於ける女子の年齢構成状態を計算
 すれば次の如くである。

年齢	人口	年齢	人口	年齢	人口
0	307	二三	165	四六	97
一	273	二四	161	四七	94
二	260	二五	157	四八	92
三	250	二六	153	四九	90
四	244	二七	150	五〇	88
五	238	二八	146	五一	85
六	233	二九	143	五二	83
七	229	三〇	140	五三	81
八	225	三一	137	五四	78
九	221	三二	134	五五	76
一〇	217	三三	131	五六	74
一一	213	三四	128	五七	72
一二	210	三五	125	五八	69
一三	206	三六	122	五九	67
一四	202	三七	119	六〇	65
一五	198	三八	117	六一	62
一六	194	三九	114	六二	60
一七	190	四〇	112	六三	57
一八	186	四一	109	六四	55
一九	181	四二	106	六五	53
二〇	177	四三	104	六六	50
二一	173	四四	102	六七	47
二二	169	四五	99	六八	45

上表の數字を、昭和十年國勢調査結果に依る年齢別女人人口（總數一萬に付）及第六回生命表年齢別女子生存數（總數一萬に付）と共に圖示すれば次の如くである。此の圖に依れば、安定人口及國勢調査人口の年齢構成間にそれ程著しい相違の無いことが判かる。安定人口の描く曲線は、恰も國勢調査人口を補整した線の如き觀を呈して居る。尙、此の點は人口を五歲階級毎に纏めた下表から特に明に看取される。

年齢級	安定人口	國勢調査人口	年級	安定人口	國勢調査人口
0-4	133.4	133.8	0-4	133.4	133.8
5-9	124.6	123.4	5-9	124.6	123.4
10-14	110.8	110.4	10-14	110.8	110.4
15-19	94.9	95.3	15-19	94.9	95.3
20-24	84.5	87.9	20-24	84.5	87.9
25-29	74.9	74.5	25-29	74.9	74.5
30-34	67.0	65.3	30-34	67.0	65.3
35-39	59.7	56.5	35-39	59.7	56.5
40-44	53.3	47.6	40-44	53.3	47.6
45-49	47.2	44.0	45-49	47.2	44.0
50-54	41.5	41.3	50-54	41.5	41.3
55-59	36.0	36.0	55-59	36.0	36.0
60-64	31.0	31.0	60-64	31.0	31.0
65-69	26.0	26.0	65-69	26.0	26.0
70-74	21.0	21.0	70-74	21.0	21.0
75-79	16.0	16.0	75-79	16.0	16.0
80-84	11.0	11.0	80-84	11.0	11.0
85-89	6.0	6.0	85-89	6.0	6.0
90-94	1.0	1.0	90-94	1.0	1.0
95-99	0.3	0.3	95-99	0.3	0.3
計	1000.0	1000.0	計	1000.0	1000.0



同様の事が一八七一年乃至一八八〇年の英蘭及威爾斯の人口状態に付て現はれて居る。即ち Sharpe 及 Lotka の前掲論文に依れば、上記期間の状態に付て計算せられた安定人口の年齢構成と同期間の其の實際の構成とは次の如くによく相對應して居る。

明に看取される。

年齢級	男人口		女人口		總人口	
	安定	實際	安定	實際	安定	實際
〇—五	一三九	一三九	一三六	一三三	一三八	一三六
五—一〇	二一八	二二三	二一五	二一七	二二六	二三〇
一〇—一五	一〇七	一一〇	一〇四	一〇四	一〇六	一〇七
一五—二〇	九七	九九	九五	九五	九六	九七
二〇—二五	八八	八七	八七	九一	八七	八九
二五—三五	一五〇	一四四	一四八	一四九	一四九	一四七
三五—四五	一六	一一二	二六	一一五	二六	一一三
四五—五五	八六	八四	八八	八七	八七	八六
五五—六五	五七	五九	六二	六一	五九	五九
六五—七五	三〇	三二	三五	三五	三三	三三
七五以上	一一	一一	一五	一五	一三	一三

従つてSharnpe及Lotkaは「此の期間に於ては、英國人口の實際年齢分布は、計算せられた安定形と極めて密接(quite closely)に一致して居る」と述べて居る。併し一國全體に於て計算せらるる安定人口の年齢構成と、此の計算に用ひられた年齢別出生率及残存率を示す時期に於ける實際人口の年齢構成とが常に此の如く對應するものでは固より無し。例へばDublin及Lotkaの計算に係る一九二〇年の資料に依る北米合衆國の安定人口と同時期に於ける實際人口の場合に於ては、安定人口に於ける若年級人口の割合は、實際人口のそれに比して遙に低く、安定人口に於ける高年級人口の割合は、實際人口のそれに比して遙に高くなつて現はれて居る。(Dublin及Lotka前掲論文参照)

上記我國及英國の場合に於けるが如く、安定人口の年齢構成と實際人口のそれとが相互によく對應せる場合に於ては、當然、安定人口及實際人口に於て計算せらるる總出生率、同死亡率及同自然増加率は、亦相互によく

安定人口の計算

對應せる値をとる。上記我國女子安定人口に於ける r 及 r' 値竝に之より得らるる其の總死亡率の値を、昭和十年に於ける此等の値と比較すれば次の如くである。

	昭和十年	安定化率
出生率(人口千に付)	三一・六三	三一・六九
死亡率(‰)	一六・七八	一七・三一
自然増加率(‰)	一四・八五	一四・三八

即ち二つの値は殆ど同じく居る。従つて昭和十年當時の我内地の總出生率、同死亡率及自然増加率は、過去の出生死亡の影響に依つて、其の現在有りの儘の状態を殆ど全く歪められては居らぬこと、年齢別出生率及死亡率が同年當時のものに將來固定すとすも、其の總出生率、同死亡率及自然増加率は同年當時のものと同大差なきものであることを知るのである。若し將來、年齢別出生率は昭和十年當時のものに比し低下し、年齢別死亡率は昭和十年當時のものに固定すと假定すれば、人口年齢構成は、上に描いた靜止人口の年齢構成状態に接近して行くこととなる。之が此の靜止人口の年齢構成状態に一致する場合に於ける年齢別出生率は昭和十年當時に比し幾何の減少となつて居るかを試みに計算してみると、靜止人口に於ける總死亡率は、前述の如く零歳平均餘命の逆數値であるから、上の圖の靜止人口に於ては其の零歳の完全平均餘命四九・六三年に〇・五年を加へた値の逆數値即ち人口千に付一九・九四となるが、此の値は、靜止人口に於ては同時に總出生率となるから、此の靜止人口に於ては、毎年總人口千ならば一九・九四人出生することとなる。此の靜止人口に於ける出生男女の割合は昭和十年當時のものと同じであるとす、第六回生命表の男女各歳生存數に依つて計算すれば、此の靜止人口に於ける女人口の割合は、五

〇・〇八%となる。而して此の女人口中年齢一五歳乃至四九歳の女人口割合は四八・三七%であるから、従つて此の静止人口に於ける年齢一五歳乃至四九歳の女子数を以て、出生總數を除した値は大體

$$19.94 \div (500.8 \times 0.4837) = 0.0823$$

即ち千人に付八二・三となる。然るに昭和十二年に於ける此の値は二二・九二であるから、上述静止人口を現はすべき年齢別出生率の減少割合は、平均して約三六%であるといふことになる。

此の静止人口に於ける年齢構成状態は、上述安定人口の場合と異り、昭和十年當時の年齢構成の状態と著しく異なるのであつて、今、静止人口の各年齢級人口を一〇〇とする昭和十年各年齢級人口の割合を示せば次の如くである。

年齢級	静止人口を百とする昭和十年人口	年齢級	静止人口を百とする昭和十年人口
〇—四	一五一	三五—四四	八一
五—九	一四九	四五—五四	七三
一〇—一四	一三七	五五—六四	六七
一五—一九	一一一	六五—七四	五二
二〇—二四	一一七	七五以上	四六
二五—三四	一〇〇		

即ち昭和十年人口は静止人口に比し若年人口著しく多く、之に反し老年人口著しく少い。尙此處に興味のあることは、此の静止人口の年齢構成の状態が一九三一年に於ける佛蘭西女人口の現實の年齢構成状態に似て居ることである。此の佛蘭西の各年齢級人口を一〇〇とする昭和十年我國各年齢級人口の割合を作つてみれば次の如くである。

年齢級	一九三一年佛蘭西人口を百とする一九三五年我國人口	年齢級	一九三一年佛蘭西人口を百とする一九三五年我國人口
〇—四	一六一	三五—四四	六七

五—九	一五二	四五—五四	六八
一〇—一四	二〇九	五五—六四	六六
一五—一九	一三七	六五—七四	五三
二〇—二四	一一五	八〇以上	五〇
二五—三四	九一		

昭和十年我國人口が若年級に於て著しく多いといふ點が、上述静止人口の場合より此の場合に一層著しくなつて居るの相違はあるが、上掲二表の數字は相互に可成よく對應して居る。(此の二表の年齢級のとり方が多少異つて居るが、前表のものを後表のものに合はせると、六五—七九級は五一、八〇以上級は四五となる)

尙上記の静止人口及佛蘭西人口の各年齢構成を直接に比較すれば次の如くである。

年齢級	静止人口	佛蘭西人口	年齢級	静止人口	佛蘭西人口
〇—四	八九	八三	三五—四四	一二九	一五六
五—九	八二	八〇	四五—五四	一二七	一二五
一〇—一四	八一	五三	五五—六四	一〇〇	一〇一
一五—一九	七九	七〇	六五—七四	九二	八八
二〇—二四	七五	七七	八〇以上	一五	一三
二五—三四	一四一	一五四	計	一、〇〇〇	一、〇〇〇

佛蘭西人口の一〇歳乃至一四歳級が不自然に低いのは、歐洲大戰の影響と考へられ、又其の中年級が目立つて膨れて居るのは、移入者の關係が與つて居るのではないかと思はれる。之が事實であつて、若し此等の點が除かれると假想すれば、上表の兩系列は非常に近似したものとなるであらう。